الْحِسَابُ وَالرِّيَاضِيَّاتُ

دُونَ اِسْتِخْدَامِ آلَةٍ حَاسِبَةٍ

"حِسَابَاتُ الجُذُورِ التَّرْبِيعِيَّةِ وَالدَّوَالِّ الْمُثَلَّثِيَّةِ"

تأليف

جاسم محمد عبد

1444 هـ – ٢٠٢٣ م

الْحِسَابُ وَالْرِّيَاضِيَّاتُ

دُونَ اِسْتِخْدَامِ آلَةٍ حَاسِبَةٍ

"حِسَابَاتُ الجُذُورِ الْتَّرْبِيعِيَّةِ وَالْدَّوَالِّ الْمُثَلَّثِيَّةِ"

تأليف

جاسم محمد عبد

1444 هـ - ٢٠٢٣ م

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

إِنَّ الْحَمْدَ لِلَّهِ نَحْمَدُهُ وَنَسْتَعِينُهُ وَنَسْتَغْفِرُهُ وَنَعُوذُ بِاللهِ مِنْ شُرُورِ أَنْفُسِنا وَمِنْ سَيِّئَاتِ أَعْمَالِنَا، مَنْ يَهْدِهِ اللهُ فَلاَ مُضِلَّ لَهُ وَمَنْ يُضْلِلْ فَلاَ هَادِيَ لَهُ وَأَشْهَدُ أَنْ لاَ إِلَٰهَ إِلاَّ اللهُ وَحْدَهُ لاَ شَرِيكَ لَهُ، وَأَشْهَدُ أَنَّ مُحَمَّدًا عَبْدُهُ وَرَسُولُهُ.

اللَّهُمَّ صَلِّ على مُحَمَّدٍ وعلَى آلِ مُحَمَّدٍ، كما صَلَّيْتَ على إبْرَاهِيمَ وعلَى آلِ إبْرَاهِيمَ؛ إنَّكَ حَمِيدٌ مَجِيدٌ، اللَّهُمَّ بَارِكْ علَى مُحَمَّدٍ وعلَى آلِ مُحَمَّدٍ، كما بَارَكْتَ علَى إبْرَاهِيمَ وعلَى آلِ إبْرَاهِيمَ؛ إنَّكَ حَمِيدٌ مَجِيدٌ.

قال الله سبحانه وتعالى عزّ وجلّ: {يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱتَّقُواْ ٱللَّهَ حَقَّ تُقَاتِهِۦ وَلَا تَمُوتُنَّ إِلَّا وَأَنتُم مُّسۡلِمُونَ} [آل عمران: ١٠٢]، وقال تعالى: {يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِي خَلَقَكُم مِّن نَّفۡسٖ وَٰحِدَةٖ وَخَلَقَ مِنۡهَا زَوۡجَهَا وَبَثَّ مِنۡهُمَا رِجَالٗا كَثِيرٗا وَنِسَآءٗۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِي تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيۡكُمۡ رَقِيبٗا} [النساء: ١]، وقال تعالى: {يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱتَّقُواْ ٱللَّهَ وَقُولُواْ قَوۡلٗا سَدِيدٗا ۞ يُصۡلِحۡ لَكُمۡ أَعۡمَٰلَكُمۡ وَيَغۡفِرۡ لَكُمۡ ذُنُوبَكُمۡۗ وَمَن يُطِعِ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥ فَقَدۡ فَازَ فَوۡزًا عَظِيمًا} [الأحزاب: ٧٠-٧١].

أَمَّا بَعْدُ؛ فَإِنَّ أَصْدَقَ الْحَدِيثِ كِتَابُ اللهِ وَخَيْرَ الْهَدْيِ هَدْيُ مُحَمَّدٍ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ وَشَرَّ الأُمُورِ مُحْدَثَاتُهَا وَكُلَّ مُحْدَثَةٍ بِدْعَةٍ وَكُلَّ بِدْعَةٍ ضَلاَلَةٍ وَكُلَّ ضَلاَلَةٍ فِي النَّارِ.

قال الله سبحانه وتعالى: {اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ۞ خَلَقَ الْإِنسَانَ مِنْ عَلَقٍ ۞ اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ۞ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ۞ عَلَّمَ الْإِنسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ} [العلق: ١-٥]، وقال تعالى عزّ وجلّ: {وَقُل رَّبِّ زِدۡنِي عِلۡمٗا} [طه: ١١٤]، وقال تعالى: {رَبِّ ٱشۡرَحۡ لِي صَدۡرِي ۞ وَيَسِّرۡ لِيٓ أَمۡرِي ۞ وَٱحۡلُلۡ عُقۡدَةٗ مِّن لِّسَانِي ۞ يَفۡقَهُواْ قَوۡلِي} [طه: ٢٥-٢٨].

اَللَّهُمَّ انْفَعْنِي بِمَا عَلَّمْتَنِي وَعَلِّمْنِي مَا يَنْفَعُنِي وَارْزُقْنِي عِلْمًا تَنْفَعُنِي بِهِ.

اَللَّهُمَّ يا مُعَلِّمَ إبراهيمَ عَلِّمْني، وَيا مُفَهِّمَ سليمانَ فَهِّمْني.

قال الله سبحانه وتعالى عزّ وجلّ: {هُوَ ٱلَّذِي جَعَلَ ٱلشَّمۡسَ ضِيَآءٗ وَٱلۡقَمَرَ نُورٗا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلۡحَقِّۚ يُفَصِّلُ ٱلۡأٓيَٰتِ لِقَوۡمٖ يَعۡلَمُونَ} [يُونُس: ٥]، وقال تعالى عزّ وجلّ: {وَجَعَلۡنَا ٱلَّيۡلَ وَٱلنَّهَارَ ءَايَتَيۡنِۖ فَمَحَوۡنَآ ءَايَةَ ٱلَّيۡلِ وَجَعَلۡنَآ ءَايَةَ ٱلنَّهَارِ مُبۡصِرَةٗ لِّتَبۡتَغُواْ فَضۡلٗا مِّن رَّبِّكُمۡ وَلِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ وَكُلَّ شَيۡءٖ فَصَّلۡنَٰهُ تَفۡصِيلٗا} [الإِسْرَاء: ١٢].

أَمَّا بَعْدُ؛

قال الإمام الشافعي مُعدِّدًا فوائد العلوم: "مَن قرأ القُرآن عظُمت قيمتُهُ، ومَن تفقَّه نبُل قدرُهُ، ومَن كتَب الحدِيث قوِيت حُجتُهُ، ومَن تعلَّم اللُّغة رقَّ طبعُهُ، ومن تعلَّم الحِساب جزُل رأيُهُ، ومَن لم يصُن نفسهُ لم ينفعهُ عِلمُهُ" [١].

يأتي مصطلح الرياضيات من الجذر اللغوي رَوْض؛ ويذكر قاموس مجمع اللغة العربية في القاهرة بأنّ كلمة رياضة تشير إلى علم الرياضيات، وقد استخدمت صفة "رياضيّ / رياضيّة"؛ بدل مصطلح عالم رياضيات أو رياضياتي، وكان مصطلح الرياضيات يتم استبداله بمصطلح "علم الحساب"، وقام الخوارزمي بإضافة مصطلح "الجبر"، وهنالك مصطلح إضافي آخر هو "علم المثلثات"؛ وكانت هذه المصطلحات تقوم مقام مصطلح الرياضيات في الكتابات العربية القديمة.

وكان لعلماء المسلمين في عصر الحضارة الإسلامية فضل كبير في تقدم علم الرياضيات، فقد أثروه وابتكروا فيه وأضافوا إليه وطوّروه، واستفاد العالم أجمع من الإرث الذي تركوه؛ ففي البداية، جمع العلماء المسلمون نتاج علماء الأمم السابقة في حقل الرياضيات، ثم ترجموه، ومنه انطلقوا في الاكتشاف والابتكار والإبداع، ويُعد المسلمون

---

١ التَّبْصِرَة؛ للإمام أبي الفَرَج عبد الرحمن بن الجوزي المتوفي سنة ٥٩٧ هـ؛ تحقيق: الدكتور مصطفى عبد الواحد؛ طبعة دار الكتب العلمية؛ الجزء الثاني؛ ص ٢٠٤.

أول من اشتغل في علم الجبر؛ وأول من كتب فيه الخوارزمي، وهم الذين أطلقوا عليه اسم "الجبر"، ونتيجة الاهتمام الذي أولوه إليه، فقد كانوا أول من ألّف فيه بطريقة علمية منظمة، كما توسعوا في حساب المثلثات وبحوث النسبة التي قسموها إلى ثلاثة أقسام: عددية وهندسية وتأليفية، وحلّوا بعض المعادلات الخطية بطريقة حساب الخطأين، والمعادلات التربيعية، وأحلّوا الجيوب محل الأوتار، وجاءوا بنظريات أساسية جديدة لحل مثلثات الأضلاع، وربطوا علم الجبر بالأشكال الهندسية، وإليهم يرجع الفضل في وضع علم المثلثات بشكل علمي منظم مستقل عن علم الفلك، ما دفع الكثيرين إلى اعتباره علمًا عربيًّا خالصًا، ومـــن الإنجازات البارزة الأخرى في الفترة الإسلامية هي؛ التقدم في علم المثلثات الكروية، وإضافة العلامة العشرية إلى نظام الأرقام العربية.

وبمشيئة الله تعالى عزَّ وجلَّ وتوفيقه ومنّه وفضله؛ سنتطرق بالتفصيل في هذا الكتاب إلى شرح؛ كيفية إيجاد الْجُذُورِ التَّرْبِيعِيَّةِ للأعداد، وكيفية حساب الدَّوَالِّ الْمُثَلَّثِيَّةِ؛ بدون استخدام آلة حاسبة.

قال الله سبحانه وتعالى عزَّ وجلَّ: {بَلِ ٱللَّهَ فَٱعْبُدْ وَكُن مِّنَ ٱلشَّٰكِرِينَ} [الزمر: ٦٦]، وقال سبحانه وتعالى عزَّ وجلَّ: {وَمَن شَكَرَ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِۦ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ رَبِّي غَنِيٌّ كَرِيمٌ} [النمل: ٤٠]، وعَنْ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: "لا يَشْكُرُ اللَّهَ مَن لا يَشْكُرُ الناسَ" [٢]، وقَالَ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: "مَنْ صُنِعَ إِلَيْهِ مَعْرُوفٌ، فَقَالَ لِفَاعِلِهِ: جَزَاكَ اللَّهُ خَيْراً، فَقَدْ أَبْلَغَ فِي الثَّنَاءِ" [٣].

٢ حديثٌ صحيحٌ: صَحَّحَهُ الشيخ الألباني في صحيح أبي داود ٤٨١١.

٣ حـــديثٌ صحـيحٌ؛ صَحَّحَهُ الشيخ الألباني في صحيح الجامع ٦٣٦٨؛ أخرجه الترمذي (٢٠٣٥)، والنسائي في "السنن الكبرى" (١٠٠٠٨)، وفي رواية: "إذا قال الرجلُ لِأَخِيهِ: جزاكَ اللَّهُ خيرًا، فقد أَبْلَغَ في الثَّناءِ" [حديثٌ صحيحٌ؛ صَحَّحَهُ الشيخ الألباني في صحيح الجامع ٧٠٨].

الشكر كل الشكر لآبائنا وأمهاتنا كما ربّــونا صغـاراً وكان وما زال كـل الفضـل لهـم علينا، اللّهم اغفر لهم وارحمهم وارض عنهم.

جزيل الشكر والتقدير والثناء والإمتنان لكلِّ مَن ساهم معنا ومد لنا يد العون وقام بتوجيهنا، وشاركَ معنا وأعانَ في إعدادِ ونَشْرِ هذا العمل.

اللّهم اغفر لنا ولهم وارحمنا وإياهم، واكتب لنا ولهم الأجر والثواب والمغفرة، واجزهم عنا خير الجزاء.

اللَّهُمَّ افْتَحْ أَقْفَالَ قُلُوبِنَا لِذِكْرِكَ، وَأَتْمِمْ عَلَيْنَا نِعْمَتَكَ وَفَضْلَكَ، وَاجْعَلْنَا فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ.

وأخيراً؛ أسأل الله سبحانه وتعالى عَزَّ وجَلَّ وأتوسل إليه بأسمائه وصفاته أن أكون قد أصبتُ الحقَّ، وأن ينفع الله سبحانه وتعالى عَزَّ وجَلَّ بهذا العمل.

وَصَلِّي اللَّهُمَّ وسَلِّمْ وَبَارِكْ عَلَى نَبيِّنا مُحَمَّدٍ، وَعَلَى آلِهِ وَصَحْبِهِ أجمعين.

وكتبه

عشية ٢٢ / شَوَّال / ١٤٤٤ هـ

الفقير إلى الله، الراجي رحمة ربه وعفوه

جاسم محمد عبد

غفر الله له ولوالديه ولزوجته ولأهل بيته، ولكل من ساهم معه في هذا العمل، ولآبائهم وأمهاتهم وأزواجهم وذرياتهم، ولجميع المؤمنين والمؤمنات، والمسلمين والمسلمات، الأحياء منهم والأمــــوات ... .

الجُذُورُ التَّرْبِيعِيَّةُ لِلْأَعْدَادِ

$$x = \sqrt{y}$$

طُرُقُ حِسَابِ الجُذُورِ التَّرْبِيعِيَّةِ لِلْأَعْدَادِ:

- حساب الجذر التربيعي لمربع كامل.
- حساب الجذر التربيعي بطريقة التخمين.
- حساب الجذر التربيعي بطريقة حساب المعدّل.
- حساب الجذر التربيعي باستخدام قانون الجذر التربيعي.
- حساب الجذر التربيعي باستخدام التقريب بالكسور المتتابعة.
- حساب الجذر التربيعي باستخدام الطريقة البابلية.
- حساب الجذر التربيعي باستخدام طريقة نيوتن.
- حساب الجذر التربيعي للعدد بتحليل العدد إلى العوامل الأولية.
- حساب الجذر التربيعي للعدد باستخدام خوارزمية القسمة المطولة.

حساب الجذر التربيعي لمربع كامل:

يمكن تعـــــــــريف المربّع الكامل بأنّه العدد الناتج عن ضرب عددين صحيحَين متساويَين ببعضهما، والجدول التالي يبين جميع المربّعات الكاملة {بين العددين ١ و٤٠٠}، وجذورها التربيعيّة:

المربّع الكامل	الجذر التربيعي له		المربّع الكامل	الجذر التربيعي له
١	١		١٢١	١١
٤	٢		١٤٤	١٢
٩	٣		١٦٩	١٣
١٦	٤		١٩٦	١٤
٢٥	٥		٢٢٥	١٥
٣٦	٦		٢٥٦	١٦
٤٩	٧		٢٨٩	١٧
٦٤	٨		٣٢٤	١٨
٨١	٩		٣٦١	١٩
١٠٠	١٠		٤٠٠	٢٠

حساب الجذر التربيعي للكسور: إنّ عملية القسمة وتوزيع إشارة الجذر على حدي الكسر هما عاملان أساسيان في حساب الجذر التربيعي لكسر ما؛ حيث يمكنك كتابة إشارة الجذر التربيعي لكل من البسط والمقام، وحساب كل منهما على حدة، ثم تقسيم البسط على المقام لينتج في النهاية عدد صحيح أو عشري.

فعلى سبيل المثال:

لحساب الجذر التربيعي للكسر:

$$\frac{9}{16}$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

لحساب الجذر التربيعي للكسر العشري؛ فإننا نقوم بتحويله إلى بسط ومقام؛ مع جعل عدد الأصفار في المقام عدداً زوجياً، ثم نقوم بحساب الجذر التربيعي لكل منهما على حدة، ثم تقسيم البسط على المقام لينتج في النهاية عدد عشري؛ فعلى سبيل المثال: لحساب الجذر التربيعي للكسر 0.0625:

$$\sqrt{0.0625} = \sqrt{0.0625\ X\ \frac{10000}{10000}}$$

$$= \frac{\sqrt{0.0625\ X\ 10000}}{\sqrt{10000}}$$

$$= \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{10000}}$$

$$= \frac{25}{100} = 0.25$$

حساب الجذر التربيعي بطريقة التخمين:

يمكن حساب الجذور في الرياضيات (الجذور التربيعية للأعداد من غير المربّعات الكاملة) بطريقة التخمين، وكما يلي:

١. اختيار أقرب مربّعين كاملين يقع العدد المراد إيجاد جذره التربيعي بينهما.
٢. يكون الجذر التربيعي للعدد المراد إيجاد جذره التربيعي محصور بين الجذور التربيعية لهذين المربّعين الكاملين.
٣. يمكن التخمين أولياً أنّ الجذر التربيعي هو معدل هذين الجذرين التربيعيين.
٤. نربّع الجذر الذي قمنا بتخمينه في الخطوة السابقة، ونتحقق ونحدد إن كانت النتيجة أقل أو أكبر من العدد الأصلي الذي عندنا.
٥. نجرب ونعدِّل تخميناً آخر أقرب حتى نصل إلى نتيجة قريبة.

وللتوضيح يمكن تطبيق الخطوات السابقة لحساب الجذر التربيعيّ للعدد ٢٠ باتباع الخطوات التالية:

- يقع العدد ٢٠ بين المربّعين الكاملين ١٦ و ٢٥، وجذورهما على التوالي هي ٤ و ٥.
- يكون الجذر التربيعيّ للعدد ٢٠ محصوراً بين العددين ٤ و ٥.

$$5 > \sqrt{20} > 4$$

- يمكن التخمين أولياً أنّ الجذر التربيعي هو معدل هذين الجذرين التربيعيين:

$$\frac{4+5}{2} = 4.5$$

- نربّع الجذر الذي قمنا بتخمينه في الخطوة السابقة، ونتحقق ونحدد إن كانت النتيجة أقل أو أكبر من العدد الأصلي الذي عندنا.

$$4.5\ X\ 4.5 = 20.25$$

- هذه النتيجة أكبر من العدد الأصلي الذي عندنا؛ وهذا يعني أنّ:

$$4.5 > \sqrt{20} > 4$$

- يمكن التخمين مرةً أخرى أنّ الجذر التربيعي هو 4.4:

$$4.4\ X\ 4.4 = 19.36$$

- هذه النتيجة أقل من العدد الأصلي الذي عندنا؛ وهذا يعني أنّ:

$$4.5 > \sqrt{20} > 4.4$$

- يمكن التخمين مرةً أخرى أنّ الجذر التربيعي هو 4.45:

$$4.45\ X\ 4.45 = 19.8025$$

- هذه النتيجة أقل من العدد الأصلي الذي عندنا؛ وهذا يعني أنّ:

$$4.50 > \sqrt{20} > 4.45$$

- يمكن التخمين مرةً أخرى أنّ الجذر التربيعي هو 4.475:

$$4.475\ X\ 4.475 = 20.0256$$

- يمكننا قبول هــــذه النتيجة أو الاستمرار بالتخمين للحصول على دقة أكبر.

- باستخدام هذه الطريقة؛ فإنّ:

$$\sqrt{20} = 4.475$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{20} = 4.47213595$$

}

حساب الجذر التربيعي بطريقة حساب المعدّل:

يمكن حساب الجذور في الرياضيات (الجذور التربيعية للأعداد من غير المربّعات الكاملة) بطريقة حساب المعدّل، وكما يلي:

١. اختيار أقـــرب مربّعين كاملين يقع العدد المراد إيجاد جذره التربيعي بينهما.

٢. يكون الجذر التربيعي للعدد المراد إيجاد جذره التربيعي محصور بين الجذور التربيعية لهذين المربّعين الكاملين.

٣. قسمة العدد المراد حساب جذره التربيعي على جذر المربّع الأول.

٤. يحسب المعدّل بين جذر المربّع الأول وبين ناتج القسمة في الخطوة السابقة.

٥. يُقسم العدد المراد حساب جذره التربيعيّ على المعدّل الناتج في الخطوة السابقة.

٦. يحسب المعدّل مرة أخرى بين ناتج القسمة في الخطوة الخامسة والرابعة، ويكون معدّل هاتين القيمتين هو أقرب قيمة للجذر التربيعيّ للعدد المراد حسابه.

وللتوضيح يمكن تطبيق الخطوات السابقة لحساب الجذر التربيعيّ للعدد ١٠ باتباع الخطوات التالية:

- يقع العدد ١٠ بين المربّعين الكاملين ٩ و ١٦، وجذورهما على التوالي هي ٣ و ٤.
- يكون الجذر التربيعيّ للعدد ١٠ محصوراً بين العددين ٣ و ٤.

$$4 > \sqrt{10} > 3$$

- يُقسم العدد ١٠ على الجذر الأول وهو ٣ كالآتي:

$$\frac{10}{3} = 3.33$$

- يُحسب المعدّل بين الجذر التربيعيَ الأول ٣ وبين ناتج القسمة السابقة ٣,٣٣ كالآتي:

$$\frac{(3 + \ 3.33)}{2} = 3.1667$$

- يُقسم العدد ١٠ على الناتج السابق كالآتي:

$$\frac{10}{3.1667} = 3.1579$$

- يُحسب المعدّل بين القيمتين ٣,١٦٦٧ و ٣,١٥٧٩ ويكون الناتج قريبٌ جدًا من الجذر التربيعيّ للعدد ١٠ وهو ٣,١٦٢٣.

$$\frac{(3.1579 + 3.1667)}{2} = 3.1623$$

- باستخدام هذه الطريقة؛ فإنّ:

$$\sqrt{10} = 3.1623$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{10} = 3.16227766$$

}

حساب الجذر التربيعي باستخدام قانون الجذر التربيعي:

يمكن حساب الجذر التربيعيّ باستخدام قانون رياضيّ مباشر يعطي قيمة قريبة جداً من قيمة الجذر التربيعيّ الحقيقيّ لأي عدد، وعادة ما يستخدم لحساب الجذور التربيعية للمربّعات غير الكاملة، والقانون هو كما يأتي:

$$\sqrt{X} = \sqrt{S} + \frac{X - S}{2\ \sqrt{S}}$$

حيث تمثّل هذه الرموز ما يلي:

X: هو العدد المراد حساب جذره التربيعي.

S: هو أقرب مربّع كامل للعدد المراد حساب جذره التربيعي.

فعلى سبيل المثال: يمكن حساب الجذر التربيعيّ للعدد ٣٩ كالآتي:

- يجب تحديد أقرب مربّع كامل للعدد ٣٩ وهو العدد ٣٦.
- تطبيق قانون الجذر التربيعي المُعطى في المعادلة السابقة كالآتي:

$$\sqrt{39} = \sqrt{36} + \frac{39 - 36}{2\ \sqrt{36}}$$

$$\sqrt{39} = 6 + \frac{3}{12} = 6.25$$

- ناتج المعادلة يساوي ٦,٢٥، وهو قريب جدًا من الجذر التربيعيّ الحقيقيّ للعدد ٣٩.

}باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{39} = 6.24499799$$

{

ويمكن حساب الجذر التربيعيّ للعدد ٤٤ كالآتي:

- يجب تحديد أقرب مربّع كامل للعدد ٤٤ وهو العدد ٤٩.
- تطبيق قانون الجذر التربيعي المُعطى في المعادلة السابقة كالآتي:

$$\sqrt{44} = \sqrt{49} + \frac{44 - 49}{2\ \sqrt{49}}$$

$$\sqrt{44} = 7 + \frac{-5}{14} = 6.6428$$

- ناتج المعادلة يساوي ٦,٦٤٢٨، وهو قريب جدًا من الجذر التربيعيّ الحقيقيّ للعدد ٤٤.

}باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{44} = 6.6332$$

{

حساب الجذر التربيعي باستخدام التقريب بالكسور المتتابعة:

إذا وُجِد عددان بحيث أنّ العدد المـــــراد حساب جذره التربيعي يساوي مجمـــوع مربعي هذين العددين {نبحث عن (عددين) مربعين كاملين يكون العــــدد المراد حساب جذره التربيعي يساوي مجموعهما}؛ أي أنّ العدد يكتب بالشكل:

$$a = x^2 + y^2$$

فسيكـــون الجـــذر التربيعي للعـــدد المراد حساب جـــذره التربيعي:

$$\sqrt{a} = \sqrt{x^2 + y^2} = x + \cfrac{y}{\cfrac{2x}{y} + \cfrac{1}{\cfrac{2x}{y} + \cfrac{1}{\cfrac{2x}{y} + \cdots}}}$$

فعلى سبيل المثال:

يمكن حساب الجذر التربيعيّ للعدد ٥ كالآتي:

$$5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$$

$$a = 5\,, \qquad x = 1\,, \qquad y = 2$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2} =$$

$$= 1 + \cfrac{2}{\cfrac{2\,X\,1}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{2\,X\,1}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{2\,X\,1}{2} + \cdots}}}$$

$$= 1 + \cfrac{2}{\cfrac{2}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{2}}}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1.5}}}} = 1 + \frac{2}{1.625} =$$

$$= 1 + 1.2307 = 2.2307$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{5} = 2.23606797$$

}

حساب الجذر التربيعي باستخدام الطريقة البابلية:

يمكن حساب الجذر التربيعيّ باستخدام الطريقة البابلية وكما يأتي:

- نختار قيمة أولية تخمينية للجذر x_0؛ {من الأحسن أن تكون الجذر التربيعي لأقرب مربع كامل للعدد المراد حساب الجذر التربيعي له}.

$$x_0^2 \approx S$$

- نحسب الأعداد {الحدود المتتالية}؛ x_n ... ... , x_2 , x_1 للمتتالية:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{S}{x_n}}{2}$$

- نتوقف عند العدد x_n حيث:

$$x_{n+1} \approx x_n$$

S: هو العدد المراد حساب جذره التربيعي.

فعلى سبيل المثال: يمكن حساب الجذر التربيعيّ للعدد ٢٧ كالآتي:

$$S = 27$$
$$x_0 = \sqrt{25} = 5$$
$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{S}{x_0}}{2} = \frac{5 + \frac{27}{5}}{2} = 5.2$$
$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{S}{x_1}}{2} = \frac{5.2 + \frac{27}{5.2}}{2} = 5.196$$
$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{S}{x_2}}{2} = \frac{5.196 + \frac{27}{5.196}}{2} = 5.196$$
$$\sqrt{27} = 5.196$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{27} = 5.1961$$

}

وعلى سبيل المثال:

يمكن حساب الجذر التربيعيّ للعدد ١٢٥٣٤٨ كالآتي:

$$S = 125348$$

نختار:

$$x_0^2 = 250000$$

فيكون:

$$x_0 = \sqrt{250000} = 500$$

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{S}{x_0}}{2} = \frac{500 + \frac{125348}{500}}{2} = 375.348$$

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{S}{x_1}}{2} = \frac{375.348 + \frac{125348}{375.348}}{2} = 354.649$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{S}{x_2}}{2} = \frac{354.649 + \frac{125348}{354.649}}{2} = 354.045$$

$$x_4 = \frac{x_3 + \frac{S}{x_3}}{2} = \frac{354.045 + \frac{125348}{354.045}}{2} = 354.045$$

$$\sqrt{125348} = 354.045$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{125348} = 354.045$$

}

حساب الجذر التربيعي باستخدام طريقة نيوتن:

يمكـــــــن حساب الجذر التربيعيّ باستخدام طريقة نيوتن؛ حيث نختار قيمة قصـــــــوى قريبة من "جذر المعادلة"، ونغير التمثيل البياني بالمماس ونحسب الصفـــــر التقريبي، فيكون صفر المماس هو قيمة تقريبية لجـــــذر المعادلة، ومـــــن ثم يمكن إعادة الحساب للحصـــول على حل أكثر قربا للجذر.

على سبيل المثال؛

لحساب الجذر التربيعي للعدد 612؛ نحتاج لحل المعادلة:

$$x^2 = 612$$

إذن، الدالة التي ينبغي استعمالها في إطار طريقة نيوتن، هي:

$$f(x) = x^2 - 612$$

مشتقة هذه الدالة هي:

$$f'(x) = 2x$$

نختار قيمة أولية تخمينية للحد الأول للمتتالية: x_0؛

$$x_0 = 10$$

نحسب الأعداد {الحدود المتتالية}؛ $x_1 , x_2 , \dots \dots \; x_n$ للمتتالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فتكون قيم حدود المتتالية كالتالي:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 10 - \frac{10^2 - 612}{2\,X\,10} = 35.6$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 35.6 - \frac{35.6^2 - 612}{2\ X\ 35.6}$$
$$= 26.395505617978$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} =$$
$$= \ 26.395505617978 - \frac{26.395505617978^2 - 612}{2\ X\ 26.395505617978}$$
$$= 24.790635492455$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} =$$
$$= \ 24.790635492455 - \frac{24.790635492455^2 - 612}{2\ X\ 24.790635492455}$$
$$= 24.738688294075$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} =$$
$$= \ 24.738688294075 - \frac{24.738688294075^2 - 612}{2\ X\ 24.738688294075}$$
$$= 24.738633753766$$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} =$$
$$= \ 24.738633753766 - \frac{24.738633753766^2 - 612}{2\ X\ 24.738633753766}$$
$$= 24.738633753706$$

$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} =$$
$$= \ 24.738633753706 - \frac{24.738633753706^2 - 612}{2\ X\ 24.738633753706}$$
$$= 24.738633753706$$

أي أنّ:

$$x_1 = 35.6$$
$$x_2 = 26.395505617978$$
$$x_3 = 24.790635492455$$
$$x_4 = 24.738688294075$$
$$x_5 = 24.738633753766$$
$$x_6 = 24.738633753706$$
$$x_7 = 24.738633753706$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

الأرقام الصحيحة في كل حد مـــــن حدود المتتالية هي الغامقة وباللون الأحمر الداكـــــن {المشتركة ما بين كل نتيجة والنتيجة التي بعدها}، وبعد عـــــدد قليل فقط من التكرارات، سنتمكن مـــــن الحصول دقة أكبر للأرقام بعد الفاصلة.

$$\sqrt{612} = 24.738633753706$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{612} = 24.7386337537059$$

}

حساب الجذر التربيعي للعدد بتحليل العدد إلى العوامل الأولية:

العوامل الأولية؛ هي الأعداد التي لا تقبل القسمة إلّا على نفسها أو ١؛ وهي:

٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ٢٩، ٣١، ٣٧، ٤١، ٤٣، ٤٧، ٥٣، ٥٩، ٦١، ٦٧، ٧١، ٧٣، ٧٩، ٨٣، ٨٩، ٩٧، ١٠١، ١٠٣، ١٠٧، ١٠٩، ١١٣، ١٢٧، ١٣١، ١٣٧، ١٣٩، ١٤٩، ١٥١، ١٥٧، ١٦٣، ١٦٧، ١٧٣، ١٧٩، ١٨١، ١٩١، ١٩٣، ١٩٧، ١٩٩، ٢١١، ٢٢٣، ٢٢٧، ٢٢٩، ٢٣٣، ٢٣٩، ٢٤١، ٢٥١، ٢٥٧، ٢٦٣، ٢٦٩، ٢٧١، ٢٧٧، ٢٨١، ٢٨٣، ٢٩٣، ٣٠٧، ٣١١، ٣١٣، ٣١٧، ٣٣١، ٣٣٧، ٣٤٧، ٣٤٩، ٣٥٣، ٣٥٩، ٣٦٧، ٣٧٣، ٣٧٩، ٣٨٣، ٣٨٩، ٣٩٧، ٤٠١، ٤٠٩، ٤١٩، ٤٢١، ٤٣١، ٤٣٣، ٤٣٩، ٤٤٣، ٤٤٩، ٤٥٧، ٤٦١، ٤٦٣، ٤٦٧، ٤٧٩، ٤٨٧، ٤٩١، ٤٩٩، ٥٠٣، ٥٠٩، ٥٢١، ٥٢٣، ٥٤١، ٥٤٧، ٥٥٧، ٥٦٣، ٥٦٩، ٥٧١، ٥٧٧، ٥٨٧، ٥٩٣، ٥٩٩، ٦٠١، ٦٠٧، ٦١٣، ٦١٧، ٦١٩، ٦٣١، ٦٤١، ٦٤٣، ٦٤٧، ٦٥٣، ٦٥٩، ٦٦١، ٦٧٣، ٦٧٧، ٦٨٣، ٦٩١، ٧٠١، ٧٠٩، ٧١٩، ٧٢٧، ٧٣٣، ٧٣٩، ٧٤٣، ٧٥١، ٧٥٧، ٧٦١، ٧٦٩، ٧٧٣، ٧٨٧، ٧٩٧، ٨٠٩، ٨١١، ٨٢١، ٨٢٣، ٨٢٧، ٨٢٩، ٨٣٩، ٨٥٣، ٨٥٧، ٨٥٩، ٨٦٣، ٨٧٧، ٨٨١، ٨٨٣، ٨٨٧، ٩٠٧، ٩١١، ٩١٩، ٩٢٩، ٩٣٧، ٩٤١، ٩٤٧، ٩٥٣، ٩٦٧، ٩٧١، ٩٧٧، ٩٨٣، ٩٩١، ٩٩٧، ...

قابلية قسمة العدد على العوامل الأولية:

- على (٢): إذا كان آحاد العدد صفراً أو عدداً زوجياً: { ٠، ٢، ٤، ٦، ٨ }.
- على (٣): إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على ٣: { ٣، ٦، ٩ }.
- على (٥): إذا كان آحاد العدد صفراً أو ٥: { ٠، ٥ }.

- على (٧): إذا كان ناتج طرح ضعف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ٧، {أو إذا كان ناتج إضافة ٥ أضعاف آحاد العدد إلى الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ٧}.

فمثلًا:

العدد ٣٧١: آحاد العدد: ١، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٣٧.

٣٧ – (٢ × ١) = ٣٧ – ٢ = ٣٥؛ آحاد العدد: ٥، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٣.

٣ – (٢ × ٥) = ٣ – ١٠ = - ٧؛ ولمّا كان العدد - ٧ يقبل القسمة على ٧؛ فإنّ العدد ٣٧١ يقبل القسمة على ٧.

- على (١١): إذا كان ناتج طرح مجموع أرقام خاناتها الزوجية من مجموع أرقام خاناتها الفردية صفر أو يقبل القسمة على ١١.

فمثلًا: العدد ٩١٨٠٨٢: ٩ – ١ + ٨ – ٠ + ٨ – ٢ = ٢٢؛ ولمّا كان العدد ٢٢ يقبل القسمة على ١١؛ فإنّ العدد ٩١٨٠٨٢ يقبل القسمة على ١١.

- على (١٣): إذا كان ناتج طرح ٩ أضعاف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ١٣، {أو إذا كان ناتج إضافة ٤ أضعاف آحاد العدد إلى الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ١٣}.

فمثلًا:

العدد ١٦٩: آحاد العدد: ٩، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ١٦.

١٦ – (٩ × ٩) = ١٦ – ٨١ = - ٦٥؛ آحاد العدد: ٥، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٦.

٦ – (٩ × ٥) = ٦ - ٤٥ = - ٣٩؛ ولمّا كان العدد - ٣٩ يقبل القسمة على ١٣؛ فإنّ العدد ١٦٩ يقبل القسمـــة على ١٣.

- على (١٧): إذا كان ناتج طرح ٥ أضعاف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ١٧.

فمثلًا: العدد ٢٢١: آحاد العدد: ١، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٢٢.

٢٢ – (٥ × ١) = ٢٢ – ٥ = ١٧؛ ولمّا كان العدد ١٧ يقبل القسمة على ١٧ فإنّ العدد ٢٢١ يقبل القسمة على ١٧.

- على (١٩): إذا كان ناتج جمع ضعف آحاد العدد مع الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ١٩.

فمثلًا: العدد ٤٣٧: آحاد العدد: ٧، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٤٣.

٤٣ + (٢ × ٧) = ٤٣ + ١٤ = ٥٧ : آحاد العدد: ٧، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٥.

٥ + (٢ × ٧) = ٥ + ١٤ = ١٩؛ ولمّا كان العدد ١٩ يقبل القسمة على ١٩ فإنّ العدد ٤٣٧ يقبل القسمة على ١٩.

- على (٢٣): إذا كان ناتج جمع ٧ أضعاف آحاد العدد مع الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ٢٣.

فمثلًا: العدد ٤٨٣: آحاد العدد: ٣، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٤٨.

٤٨ + (٧ × ٣) = ٤٨ + ٢١ = ٦٩؛ ولمّا كان العدد ٦٩ يقبل القسمة على ٢٣ فإنّ العدد ٤٨٣ يقبل القسمة على ٢٣.

- على (٢٩): إذا كان ناتج جمع ٣ أضعاف آحاد العدد مع الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ٢٩.

فمثلًا: العدد ٥٢٢: آحاد العدد: ٢، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٥٢.

٥٢ + (٣ × ٢) = ٥٢ + ٦ = ٥٨: آحاد العدد: ٨، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٥.

٥ + (٣ × ٨) = ٥ + ٢٤ = ٢٩؛ ولمّا كان العدد ٢٩ يقبل القسمة على ٢٩ فإنّ العدد ٥٢٢ يقبل القسمة على ٢٩.

- على (٣١): إذا كان ناتج طرح ٣ أضعاف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ٣١.

فمثلًا: العدد ٤٦٥: آحاد العدد: ٥، والرقم الناتج من بقية الأرقام: ٤٦.

٤٦ - (٣ × ٥) = ٤٦ - ١٥ = ٣١؛ ولمّا كان العدد ٣١ يقبل القسمة على ٣١ فإنّ العدد ٤٦٥ يقبل القسمة على ٣١.

عملية التحليل إلى العوامل الأولية: هي عملية تفكيك وتحليل العدد الصحيح في الرياضيات إلى جَدَاء عوامل أولية، وكتابة ذلك العدد على شكل جَدَاء أعدادٍ أوليةٍ تحت إشارة الجذر التربيعي، ثم إيجاد جذور كل منها {في الرياضيات: الجَدَاء؛ هو: عملية ضرب كميتين؛ (الترتيب الذي تأتي فيه الكميتين في عملية الضرب ليس له تأثير على قيمة الجَدَاء)}.

فعلى سبيل المثال: تكتب العوامل الأولية للعدد ٨١ على شكل جداء: ٣ × ٣ × ٣ × ٣؛ وبالتالي يمكن كتابة الجذر التربيعي لـ ٨١ على الشكل التالي:

$$\sqrt{81} = \sqrt{3\ X\ 3\ X\ 3\ X\ 3} = \sqrt{3^2\ X\ 3^2}$$
$$= \sqrt{3^2}\ X \sqrt{3^2} = 3\ X\ 3 = 9$$
$$\sqrt{81} = 9$$

الجدول التالي يبين العـــوامل الأولية {بين العددين ١ و١٠٠٠}، وجذورها التربيعيّة:

العامل الأولي	جذره التربيعي	العامل الأولي	جذره التربيعي	العامل الأولي	جذره التربيعي	العامل الأولي	جذره التربيعي
2	1.414213	191	13.820274	439	20.952326	709	26.627053
3	1.732050	193	13.892443	443	21.047565	719	26.814175
5	2.236067	197	14.035668	449	21.189620	727	26.962937
7	2.645751	199	14.106735	457	21.377558	733	27.073972
11	3.316624	211	14.525839	461	21.470910	739	27.184554
13	3.605551	223	14.933184	463	21.517434	743	27.258026
17	4.123105	227	15.066519	467	21.610182	751	27.404379
19	4.358898	229	15.132745	479	21.886068	757	27.513632
23	4.795831	233	15.264337	487	22.068076	761	27.586228
29	5.385164	239	15.459624	491	22.158519	769	27.730849
31	5.567764	241	15.524174	499	22.338307	773	27.802877
37	6.082762	251	15.842979	503	22.427661	787	28.053520
41	6.403124	257	16.031219	509	22.561028	797	28.231188
43	6.557438	263	16.217274	521	22.825424	809	28.442925
47	6.855654	269	16.401219	523	22.869193	811	28.478061
53	7.280109	271	16.462077	541	23.259406	821	28.653097
59	7.681145	277	16.643316	547	23.388031	823	28.687976
61	7.810249	281	16.763054	557	23.600847	827	28.757607
67	8.185352	283	16.822603	563	23.727621	829	28.792360
71	8.426149	293	17.117242	569	23.853720	839	28.965496

29.206163	853	23.895606	571	17.521415	307	8.544003	73
29.274562	857	24.020824	577	17.635192	311	8.888194	79
29.308701	859	24.228082	587	17.691806	313	9.110433	83
29.376861	863	24.351591	593	17.804493	317	9.433981	89
29.614185	877	24.474476	599	18.193405	331	9.848857	97
29.681644	881	24.515301	601	18.357559	337	10.049875	101
29.715315	883	24.637369	607	18.627936	347	10.148891	103
29.782545	887	24.758836	613	18.681541	349	10.344080	107
30.116440	907	24.839484	617	18.788294	353	10.440306	109
30.182776	911	24.879710	619	18.947295	359	10.630145	113
30.315012	919	25.119713	631	19.157244	367	11.269427	127
30.479501	929	25.317977	641	19.313207	373	11.445523	131
30.610455	937	25.357444	643	19.467922	379	11.704699	137
30.675723	941	25.436194	647	19.570385	383	11.789826	139
30.773365	947	25.553864	653	19.723082	389	12.206555	149
30.870698	953	25.670995	659	19.924858	397	12.288205	151
31.096623	967	25.709920	661	20.024984	401	12.529964	157
31.160872	971	25.942243	673	20.223748	409	12.767145	163
31.256999	977	26.019223	677	20.469489	419	12.922847	167
31.352830	983	26.134268	683	20.518284	421	13.152946	173
31.480152	991	26.286878	691	20.760539	431	13.379088	179
31.575306	997	26.476404	701	20.808652	433	13.453624	181

على سبيل المثال:

يمكن حساب الجذر التربيعي للعدد ٢٦٠,٦٢٠,٤٦٠,١٠٠ كالآتي:

١.	260620460100		2	يقبل القسمة على ٢: آحاده صفر
٢.	130310230050		2	يقبل القسمة على ٢: آحاده صفر
٣.	65155115025		3	لا يقبل القسمة على ٢؛ وإنما يقبل القسمة على ٣: مجموع أرقامه ٩؛ ٦ + ٥ + ١ + ٥ + ٥ + ١ + ١ + ٥ + ٠ + ٢ + ٥ = ٣٦؛ ٣ + ٦ = ٩
٤.	21718371675		3	يقبل القسمة على ٣: مجموع أرقامه ٣؛ ٢ + ١ + ٧ + ١ + ٨ + ٣ + ٧ + ١ + ٦ + ٧ + ٥ = ٤٨؛ ٨ + ٤ = ١٢؛ ٢ + ١ = ٣
٥.	7239457225		5	لا يقبل القسمة على ٣؛ وإنما يقبل القسمة على ٥: آحاده ٥؛
٦.	1447891445		5	يقبل القسمة على ٥: آحاده ٥؛
٧.	289578289		7	لا يقبل القسمة على ٥؛ وإنما يقبل القسمة على ٧: ناتج طرح ضعف آحاد العدد من الرقم

			الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ٧؛ $28957828-18=28957810$ $2895781-0=2895781$ $289578-2=289576$ $28957-12=28945$ $2894-10=2884$ $288-8=280$ $28-0=28$
٨.	41368327	7	يقبل القسمة على ٧: ناتج طرح ضعف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ٧؛ $4136832-14=4136818$ $413681-16=413665$ $41366-10=41356$ $4135-12=4123$ $412-6=406$ $40-12=28$
٩.	5909761	11	لا يقبل القسمة على ٧؛ وإنّما يقبل القسمة على ١١: ناتج طرح مجموع أرقام خاناتها الزوجية من مجموع أرقام خاناتها الفردية صفر أو يقبل القسمة على ١١؛ $5-9+0-9+7-6+1=-11$
١٠.	537251	11	يقبل القسمة على ١١؛ ناتج طرح مجموع أرقام خاناتها الزوجية من مجموع أرقام خاناتها الفردية صفر أو يقبل القسمة على ١١؛ $5-3+7-2+5-1=11$

.١٢	48841		13	لا يقبل القسمة على ١١؛ وإنما يقبل القسمة على ١٣: ناتج طرح ٩ أضعاف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ١٣؛ $4884 - 9 = 4875$ $487 - 45 = 442$ $44 - 18 = -26$
.١٣	3757		13	يقبل القسمة على ١٣: ناتج طرح ٩ أضعاف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ١٣؛ $375 - 63 = 312$ $31 - 18 = 13$
.١٤	289		17	لا يقبل القسمة على ١٣؛ وإنما يقبل القسمة على ١٧: ناتج طرح ٥ أضعاف آحاد العدد من الرقم الناتج من بقية الأرقام قابلاً للقسمة على ١٧؛ $28 - 45 = -17$
.١٥	17		17	يقبل القسمة على ١٧؛
.١٦	1			

وباختصار؛ تكون عملية التحليل إلى العوامل الأولية، كما يلي:

2	260620460100
2	130310230050
3	65155115025
3	21718371675
5	7239457225
5	1447891445
7	289578289
7	41368327
11	5909761
11	537251
13	48841
13	3757
17	289
17	17
	1

أي أنّ:

$$260620460100 = 2 X 2 X 3 X 3 X 5 X 5 X 7 X 7 X 11 X 11 X 13 X 13 X 17 X 17 = 2^2 X 3^2 X 5^2 X 7^2 X 11^2 X 13^2 X 17^2$$

فيكون:

$$\sqrt{260620460100} = \sqrt{2^2\ X\ 3^2\ X\ 5^2\ X\ 7^2\ X\ 11^2\ X\ 13^2\ X\ 17^2} = 2\ X\ 3\ X\ 5\ X\ 7\ X\ 11\ X\ 13\ X\ 17 = 510510$$

أي أنّ:

$$\sqrt{260620460100} = 510510$$

وعلى سبيل المثال: يمكن حساب الجذر التربيعيّ للعدد ٠,١٢٥ كالآتي:

نحوله إلى كسر اعتيادي (بسط ومقام)؛ مع جعل عدد الأصفار في المقام عدداً زوجياً:

$$0.125 = 0.125\ X\ \frac{10000}{10000} = \frac{1250}{10000}$$

$$\sqrt{\frac{1250}{10000}} = \frac{\sqrt{1250}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{1250}}{100}$$

نجد الآن الجذر التربيعي للعدد ١٢٥٠؛ وكما يلي:

2	1250
5	625
5	125
5	25
5	5
	1

أي أنّ:

$$1250 = 2\ X\ 5\ X\ 5\ X\ 5\ X\ 5 = 2\ X\ 5^4$$

فيكون:

$$\sqrt{1250} = \sqrt{2\ X\ 5^4} =$$
$$= \sqrt{2}\ X\ 5^2$$

وبتعويض قيمة الجذر التربيعي للعدد ٢ من جدول الجذور التربيعية للعوامل الأولية؛ نحصل على:

$$\sqrt{1250} = 1.414213\ X\ 25 = 35.355325$$

فيكون:

$$\sqrt{0.125} = \sqrt{\frac{1250}{10000}} =$$
$$= \frac{35.355325}{100} =$$
$$= 0.35355325$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{0.125} = 0.35355339$$

}

حساب الجذر التربيعي للعدد باستخدام خوارزمية القسمة المطولة:

تستخدم في هذه الطريقة؛ عملية تشبه القسمة المطولة لإيجاد الجذر التربيعي بدقة رقمًا برقم، ورغم أن هذا ليس ضروريًا إلا أنك قد تجد من الأسهل إجراء هذه العملية إذا نظمت مساحة العمل بصريًا وقسمت العدد لأجزاء يسهل العمل عليها.

على سبيل المثال:

$$\sqrt{79520789182.47897} = ?$$

- ارسم أولًا خطًا رأسيًا يقسم مساحة العمل إلى جزئين، ثم ارسم خطًا أفقيًا قرب القمة لقسمته إلى جزء علوي صغير وآخر سفلي كبير.

- اكتب العدد في أقصى يسار قمة المساحة اليسرى السفلى.

79520789182.47897

- اقسم أرقام العدد بعد ذلك لأزواج بدءًا من العلامة العشرية.

← . →

7 95 20 78 91 82 . 47 89 7

_ __ __ __ __ __ __ __ _

7 95 20 78 91 82 . 47 89 7

}

ملاحظة هامة جداً:

إذا كان العدد المراد إيجاد الجذر التربيعي له عدداً صحيحاً؛ فإننا نقسم أرقام العدد لأزواج بدءًا من الآحاد ونتحرك إلى أقصى اليسار.

على سبيل المثال؛ العدد:

79520789182

←

7 95 20 78 91 82

ثم نضيف العلامة العشرية إلى يمين العدد عند الوصول إلى خطوتها لاحقاً إن تطلب الأمر ذلك ثم نضيف إلى يمينها بعد ذلك العدد المناسب من أزواج الاصفار.

أو نضيف العلامة العشرية منذ الآن إلى يمين العدد ثم نضيف إلى يمينها العدد المناسب من أزواج الاصفار؛ ثم نقسم أرقام العدد لأزواج بدءًا من العلامة العشرية.

على سبيل المثال؛

العدد:

79520789182

7 95 20 78 91 82

← . →

7 95 20 78 91 82 . 00 00 00

{

- نتحـــــــــرك مع أزواج الأرقام مـــــــــــن أقصى اليسار إلى أقصى اليمين.

_ __ __ __ __ __ __ __ _ 7 95 20 78 91 82 . 47 89 7 →	

- ابدأ بالزوج الأول من الرقم (سواءً كان مفردًا أو زوجًا) وجد أكبر مربع كامل يقل عنه أو يساويه ثم خذ الجذر التربيعي لهذا المربع الكامل.

المربّع الكامل	الجذر التربيعي له		المربّع الكامل	الجذر التربيعي له
١	١		٣٦	٦
٤	٢		٤٩	٧
٩	٣		٦٤	٨
١٦	٤		٨١	٩
٢٥	٥			

$$4\ (2^2) \leq 7\ < 9\ (3^2)$$

أكبر مربع كامل يقل عن ٧ أو يساويه هو $4 = (2^2)$

فيكون أكبر جذر تربيعي لمربع كامل أقل أو يساوي ٧ هو ٢.

$$n = 2$$

- اكتب هذه القيمة n في أقصى يسار المساحة العلوية اليسرى؛ {فهذا هو أول رقم من إجابتنا}:

2

7 95 20 78 91 82 . 47 89 7

- اكتب مربع هذه القيمة n (أي $n^2 = 2^2 = 4$) تحت زوج الأرقام الأول في أقصى اليسار، واطرحه منه، واكتب النتيجة تحته:

$$7 - 4 = 3$$

2	
$\overline{7}\ \ \overline{95}\ \ \overline{20}\ \ \overline{78}\ \ \overline{91}\ \ \overline{82}\ \ .\ \overline{47}\ \ \overline{89}\ \ \overline{7}$	
4 -	
___	
3	

- كذلك اكتب هذه القيمة n (أي $n = 2$) في الربع السفلي الأيمن واضربه بالرقم ٢ {أي ضاعفه}؛ واكتب النتيجة تحته:

$$2\ X\ 2 = 4$$

2	
$\overline{7}\ \overline{95}\ \ \overline{20}\ \ \overline{78}\ \ \overline{91}\ \ \overline{82}\ .\overline{47}\ \ \overline{89}\ \ \overline{7}$	2
4 –	2 X
___	___
3	4

بداية حلقة التكرار:

- انقل الجزء التالي من الرقم الذي نحسب جذره التربيعي {أنزل الزوج التالي: أي ٩٥ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة التي وجدناها قبل خطوتين؛ {٣}، في الربع الأيسر السفلي.

2	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	4

- خصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم 4 إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

2	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	4 ?
	?

- نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم 4 إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، ولا بد أن يكون هذا الرقم أكبر رقم صحيح يجعل ناتج عملية الضرب في الربع الأيمن { $4?\,X\,?$ } أصغر من أو يساوي الرقم الحالي الموجود على اليسار 395 .

$$4?\,X\,? \leq 395$$

وهذا الرقم يكون محصوراً بين ١ و ٩.

$$9:\ 49\,X\,9 = 441$$
$$8:\ 48\,X\,8 = 384$$

- يعطينا ملء الفراغ بالرقم ٩ في مثالنا ٤٤١ وهذا أكبر من ٣٩٥، بينما يعطينا ملء الفراغ بالرقم ٨ قيمة ٣٨٤ وهذا أصغر من ٣٩٥، لذا فإنّ ٩ أكبر من اللازم لكن ٨ ستكون مناسبة على الأرجح.

$$384 < 395 < 441$$

- اكتب ٨ في الفراغين في المربع الأيمن السفلي:

2	
$\overline{7}\ \overline{95}\ \overline{20}\ \overline{78}\ \overline{91}\ \overline{82}\ .\ \overline{47}\ \overline{89}\ \overline{7}$ 4 – 3 95	2 2 X 4 8 8

• اكتب ناتج عملية الضـــرب $48 X 8 = 384$ تحت الرقم 395 أسفل الربع الأيســـــــر الســـــــفلي؛ وقم بعملية الطـــــرح $395 - 384 = 11$ واكتب الناتج أســـفل الربع الأيسر السفلي:

2	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	4 8
3 84 –	8
11	

• اكتب القيمة ٨ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الرقم الأول}؛ وهذا هو الرقم الثاني في الجذر التربيعي.

28	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	4 8
3 84 –	8
11	

• اكتب ناتج عملية الجمع $48 + 8 = 56$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

28	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7 4 – 3 95 3 84 – 11	2 2 X 48 8 + 56

نهاية حلقة التكرار.

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الجزء التالي من الرقم الذي نحسب جذره التربيعي {الزوج التالي: أي ٢٠ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

28	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7 4 – 3 95 3 84 – 1120	2 2 X 48 8 + 56 ? ?

• نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون هذا الرقم أكبر رقم صحيح يجعل ناتج عملية الضرب { $56?\,X\,?$ } أصغر من أو يساوي الرقم الحالي الموجود على اليسار 1120 ؛ أي: $56?\,X\,? \leq 1120$ وهذا الرقم يكون بين ١ و ٩.

$1:\ 561\ X\ 1 = 561$

$2:\ 562\ X\ 2 = 1124$

لذا فإنّ ١ ستكون مناسبة على الأرجح؛ وسنكتبها في الفراغين في المربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب $561\ X\ 1 = 561$ تحت الرقم 1120 أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونجري عملية الطرح $1120 - 561 = 559$ ونكتب الناتج أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الجمع $561 + 1 = 562$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

28	
$\overline{7}\ \overline{95}\ \overline{20}\ \overline{78}\ \overline{91}\ \overline{82}\ .\ \overline{47}\ \overline{89}\ \overline{7}$	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
559	562

- نكتب القيمة ١ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الثالث في الجذر التربيعي.

281	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
559	562

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الجزء التالي من الرقم الذي نحسب جذره التربيعي {الزوج التالي: أي ٧٨ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٢ إلى يمينه

وفـــــــراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمـــــــن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

281	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	562

• نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦٢ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون هذا الرقم أكبر رقم صحيح يجعل ناتج عملية الضرب { $562?\ X\ ?$ } أصغر من أو يساوي الرقم الحالي الموجود على اليسار 55978 ؛ أي: $55978 \geq 562?\ X\ ?$ والرقم يكون بين ١ و ٩.

$9:\ 5629\ X\ 9 = 50661$

لذا فإنّ ٩ ستكون مناسبة على الأرجح؛ وسنكتبها في الفراغين في المـربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب $5629\ X\ 9 = 50661$ تحت الرقم 55978 أسفل الربع الأيســـــــــر السفلي؛ ونجري عملية الطرح $55978 - 50661 = 5317$ ونكتب الناتج أسفل الربع

الأيسر السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الجمع $5629 + 9 = 5638$

أسفل الربع الأيمن السفلي:

281	
7 95 20 78 91 82 .47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9
5317	5638

- نكتب القيمة ٩ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الرابع في الجذر التربيعي.

2819	
7 95 20 78 91 82 .47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561

1 +	561 –
5629	55978
9	50661 –
5638	5317

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الزوج التالي {أي ٩١ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٣٨ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

	2819
2	7 95 20 78 91 82 . 47 89 7
2 X	4 –
48	3 95
8 +	3 84 –
561	1120
1 +	561 –
5629	55978
9	50661 –
5638	531791

- نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦٣٨ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون: $5638?\,X\,? \le 531791$ والرقم يكون بين ١ و ٩.

$9:\ 56389\ X\ 9 = 507501$

لذا فإنّ ٩ ستكون مناسبة على الأرجح؛ وسنكتبها في الفراغين في المربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب $56389\ X\ 9 = 507501$ تحت الرقم 531791 أسفل الربع الأيسـر السفلي؛ ونجري عملية الطرح $531791 - 507501 = 24290$ ونكتب الناتج أسفل الربع الأيسـر السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الجمع $56389 + 9 = 56398$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

2819	
7 95 20 78 91 82 .47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +

24290	56398

• نكتب القيمة ٩ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الخامس في الجذر التربيعي.

28199	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
24290	56398

نكرر حلقة التكرار:

• انقل وأنزل الزوج التالي {أي ٨٢ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطـــروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٣٩٨ إلى يمينه

وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحـــــــد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

28199	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	56398

• نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦٣٩٨ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون: $56398?\,X\,? \leq 2429082$

والرقم يكون بين ١ و ٩.

$5:\ \ 563985\,X\,5 = 2824925$

$4:\ \ 563984\,X\,4 = 2255936$

لذا فإنّ 4 ستكون مناسبة على الأرجح؛ وسنكتبها في الفراغين في المربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب $2255936 = 4 \times 563984$ تحت الرقم 2429082 أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونجري عملية الطرح $173146 = 2255936 - 2429082$ ونكتب الناتج أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الجمع $563988 = 4 + 563984$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

28199	
7 95 20 78 91 82 .47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
173146	563988

• نكتب القيمة ٤ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم السادس في الجذر التربيعي.

281994	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
173146	563988

• نكتب الفاصلة العشرية {العلامة العشرية}، حين نصل إليها؛ مباشرة في إجابتنا في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}.

281994.	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2

4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
173146	563988

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الزوج التالي {أي ٤٧ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

281994.	
7 95 20 78 91 82 .47 89 7	2
4 –	2 X

48	3 95
8 +	3 84 –
561	1120
1 +	561 –
5629	55978
9 +	50661 –
56389	531791
9 +	507501 –
563984	2429082
4 +	2255936 –
563988	17314647

• نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون: $563988?\,X\,? \le 17314647$ والرقم يكون بين ١ و ٩.

$$3:\ 5639883\ X\ 3 = 16919649$$

لذا فإنّ 3 ستكون مناسبة على الأرجح؛ وسنكتبها في الفراغين في المربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب $563988\mathbf{3}\ X\ \mathbf{3} = 16919649$ تحت الرقم 17314647 أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونجري عملية

الطرح $17314647 - 16919649 = 394998$

ونكتب الناتج أسفل الـــــــــربع الأيســـر السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الجمع $5639883 + 3 = 5639886$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

281994.	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
394998	5639886

- نكتب القيمة ٣ في الربــع الأيســـر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هـــو الرقم السابـــع في الجــذر التربيعي.

281994.3	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
394998	5639886

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الزوج التالي {أي ٨٩ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

281994.3	
7 95 20 78 91 82 .47 89 7	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
39499889	5639886

• نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون: $5639886?\,X\,? \leq 39499889$ والرقم يكون بين ١ و ٩.

$1:\ 56398861\ X\ 1 = 56398861$

وبما أنّ 56398861 ليس أقل من 39499889 لذا فإنّ قيمة صفر (٠) ستكون هي المناسبة في هذه الحالة؛ وسنكتبها بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦ إلى يمينه في المربع الأيمن السفلي، ونكتب القيمة صفر (٠) في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الثامن في الجذر التربيعي.

ملاحظة هامة جداً: نقوم بخطوة: {**إضافة قيمة صفر (٠) بجوار الرقم الموجود في المربع الأيمن السفلي {إلى يمينه}، وكذلك إضافة القيمة صفر (٠) في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ ضمن أرقام الجذر التربيعي**} في كل مرة يكون فيه الرقم الناتج في المربع الأيمن السفلي بعد إضافة قيمة ١ إلى يمينه أقل من الرقم الموجود في أسفل المربع الأيسر السفلي، ومن ثم ننتقل إلى إعادة حلقة التكرار كما سبق.

281994.30	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 7	2
4 −	2 X
3 95	48
3 84 −	8 +
1120	561
561 −	1 +

5629	55978
9 +	50661 –
56389	531791
9 +	507501 –
563984	2429082
4 +	2255936 –
5639883	17314647
3 +	16919649 –
56398860	39499889

بما أنّه لم يتبق لنا سوى رقم مفرد واحد: وهو الرقم (٧)، وليس زوج من الأرقام؛ لذلك فإننا سنضيف صفراً إلى يمينه ليصبح (٧٠)؛ {إضافة أي عدد من الأصفار إلى يمين أي عدد كسري بعد الفاصلة العشرية، لا يؤثر عليه ولا يغير قيمته؛ ولذلك فإننا سنضيف لاحقاً أزواجاً من الأصفار ونقوم بنقلها وإنزالها في حلقة التكرار، لزيادة دقة الجذر التربيعي، إلى القدر الذي نريده ونحتاج إليه}.

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الزوج التالي {أي ٧٠ (بدلاً من ٧)؛ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية

الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦٠ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

281994.30	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 70	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
3949988970	56398860

• نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦٠ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون: $56398860?\,X\,? \leq 3949988970$ والرقم يكون بين ١ و ٩.

$$7:\ 563988607\,X\,7 = 3947920249$$
$$8:\ 563988608\,X\,8 = 4511908864$$

لذا فإنّ ٧ ستكون مناسبة على الأرجح؛ وسنكتبها في الفراغين في المربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب $563988607\,X\,7 = 3947920249$ تحت الرقم 3949988970 أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونجري عملية الطرح

$$3949988970 - 3947920249 = 2068721$$

ونكتب الناتج أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الجمع $563988607 + 7 = 563988614$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

281994.30	
7 95 20 78 91 82 .47 89 70	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629

50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
3949988970	563988607
3947920249 –	7 +
2068721	563988614

• نكتب القيمة ٧ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم التاسع في الجذر التربيعي.

281994.307	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 70	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +

56389	531791
9 +	507501 –
563984	2429082
4 +	2255936 –
5639883	17314647
3 +	16919649 –
563988607	3949988970
7 +	3947920249 –
563988614	2068721

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الزوج التالي {أي زوج من الأصفار (٠٠) في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦١٤ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

	281994.307
2	7 95 20 78 91 82 . 47 89 70
2 X	4 –
48	3 95
8 +	3 84 –

1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
3949988970	563988607
3947920249 –	7 +
206872100	563988614

- نخمـــن رقماً ونضعـــه نفســـه في الفراغ بجـــوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦١٤ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون: $563988614?\ X\ ? \le 206872100$ والرقم يكون بين ١ و ٩.

$1:\ 5639886141\ X\ 1 = 5639886141$

وبما أنّ 5639886141 ليس أقل مـن 206872100 لذا فإنّ قيمة صفر (٠) ستكون هي المناسبة في هذه الحالة؛ وسنكتبها بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦١٤ إلى يمينه في المربع الأيمن السفلي، ونكتب القيمة صفر (٠) في

الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم العاشر في الجذر التربيعي.

281994.3070	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 70	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
3949988970	563988607
3947920249 –	7 +
206872100	5639886140

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الزوج التالي {أي زوج من الأصفار (٠٠) في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦١٤٠ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

281994.3070	
7 95 20 78 91 82 . 47 89 70	2
4 –	2 X
3 95	48
3 84 –	8 +
1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +

3949988970 3947920249 – 20687210000	563988607 7 + 5639886140

- نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦١٤٠ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون: $5639886140?\, X\, ? \leq 20687210000$ والرقم يكون بين ١ و ٩.

$1:\ 56398861401\ X\ 1 = 56398861401$

وبما أنّ 56398861401 ليس أقل من 20687210000 لذا فإنّ قيمة صفر (٠) ستكون هي المناسبة في هذه الحالة؛ وسنكتبها بجوار الرقم ٥٦٣٩٨٨٦١٤٠ إلى يمينه في المربع الأيمن السفلي، ونكتب القيمة صفر (٠) في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الحادي عشر في الجذر التربيعي.

281994.30700	
$\overline{7}\ \overline{95}\ \overline{20}\ \overline{78}\ \overline{91}\ \overline{82}\ .\overline{47}\ \overline{89}\ \overline{70}$ 4 – 3 95 3 84 –	2 2 X 48 8 +

1120	561
561 –	1 +
55978	5629
50661 –	9 +
531791	56389
507501 –	9 +
2429082	563984
2255936 –	4 +
17314647	5639883
16919649 –	3 +
3949988970	563988607
3947920249 –	7 +
20687210000	56398861400

• نستطيع الاستمرار في الحساب، أو نتوقف عند هذا الحد؛ فيكون:

$$\sqrt{79520789182.47897} = 281994.30700$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{79520789182.47897} = 281994.30700$$

}

مثال آخر:

$$\sqrt{103041} = ?$$

- ارسم أولًا خطًا رأسيًا يقسم مساحة العمل إلى جزئين، ثم ارسم خطًا أفقيًا قرب القمة لقسمته إلى جزء علوي صغير وآخر سفلي كبير، واكتب العدد في أقصى يسار قمة المساحة اليسرى السفلى.

103041	

- نقسم أرقام العدد لأزواج بدءًا من الآحاد ونتحرك إلى أقصى اليسار (لأن العدد صحيح)؛ {أو نضيف العلامة العشرية منذ الآن إلى يمين العدد ثم نضيف إلى يمينها العدد المناسب من أزواج الاصفار؛ ثم نقسم أرقام العدد لأزواج بدءًا من العلامة العشرية}.

$$\overleftarrow{10\quad 30\quad 41}$$

$\overline{10}\ \overline{30}\ \overline{41}$	

- ثم نتحرك مع أزواج الأرقام من أقصى اليسار إلى أقصى اليمين؛ ونبدأ بالزوج الأول من الرقم، ونجد أكبر مربع كامل يقل عنه أو يساويه؛ ثم نأخذ الجذر التربيعي لهذا المربع الكامل.

$$9\ (3^2) \leq 10\ < 16\ (4^2)$$

أكبر مربع كامل يقل عن 10 أو يساويه هو $9 = (3^2)$

فيكون أكبر جذر تربيعي لمربع كامل أقل أو يساوي ١٠ هو ٣.

$$n = 3$$

اكتب هذه القيمة n في أقصى يسار المساحة العلوية اليسرى؛ {فهذا هو أول رقم من إجابتنا}:

3	
$\overline{10}\ \ \overline{30}\ \ \overline{41}$	

- اكتب مربع هذه القيمة n (أي $9 = 3^2 = n^2$) تحت زوج الأرقام الأول في أقصى اليسار، واطرحه منه، واكتب النتيجة تحته:

$$10 - 9 = 1$$

3	
$\overline{10}\ \ \overline{30}\ \ \overline{41}$ $9\ -$ $\overline{\ 1\ }$	

- كذلك اكتب هذه القيمة n (أي $n = 3$) في الربع السفلي الأيمن واضربه بالرقم ٢ {أي ضاعفه}؛ واكتب النتيجة تحته:

$$3\ X\ 2 = 6$$

3	
$\overline{10}\ \overline{30}\ \overline{41}$ 9 – 1	3 2 X 6

بداية حلقة التكرار:

- انقل الجزء التالي من الرقم الذي نحسب جذره التربيعي {أنزل الزوج التالي: أي ٣٠ في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة التي وجدناها قبل خطوتين؛ {١}، في الربع الأيسر السفلي.

3	
$\overline{10}\ \overline{30}\ \overline{41}$ 9 – 130	3 2 X 6

- خصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٦ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

3	
$\overline{10}\ \overline{30}\ \overline{41}$ 9 − ——— 130	3 2 X —— 6 ? ? ——

- نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٦ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، ولا بد أن يكون هذا الرقم أكبر رقم صحيح يجعل ناتج عملية الضرب في الربع الأيمن $\{\ ?\ X\ 6?\ \}$ أصغر من أو يساوي الرقم الحالي الموجود على اليسار 130 . وهذا الرقم يكون محصوراً بين ١ و ٩.

$2:\ 62\ X\ 2 = 124$
$3:\ 63\ X\ 3 = 189$
$124 < 130 < 189$

- قيمة ٢ ستكون مناسبة على الأرجح، لذلك نكتب ٢ في الفراغين في المربع الأيمن السفلي:

3	
$\overline{10}\ \overline{30}\ \overline{41}$ 9 − ——— 130	3 2 X —— 62 2 ——

- اكتب ناتج عملية الضرب $62 X 2 = 124$ تحت الرقم 130 أسفل الربع الأيسر السفلي؛ وقم بعملية الطرح $130 - 124 = 6$ واكتب الناتج أسفل الربع الأيسر السفلي؛ واكتب القيمة ٢ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الرقم الأول}؛ وهذا هو الرقم الثاني في الجذر التربيعي؛ واكتب ناتج عملية الجمع $62 + 2 = 64$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

32	
$\overline{10}\ \overline{30}\ \overline{41}$ 9 – ——— 130 124 – ——— 6	3 2 X ——— 62 2 + ——— 64

نهاية حلقة التكرار.

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الجـــــــــــزء التالي من الرقم الذي نحسب جذره التربيعي {الزوج التالي: أي 41 في مثالنا}؛ بجـــــــوار القيمة المطروحة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضـــــــرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجـــــوار الرقم 64 إلى يمينه

وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

32	
$\overline{10}\ \ \overline{30}\ \ \overline{41}$	3
9 –	2 X
130	62
124 –	2 +
641	64 ?
	?

- نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٦٤ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون هذا الرقم أكبر رقم صحيح يجعل ناتج عملية الضرب { $64?\,X\,?$ } أصغر من أو يساوي الرقم الحالي الموجود على اليسار 641 ؛ أي: $64?\,X\,?\leq 641$ وهذا الرقم يكون بين ١ و ٩.

$1:\ 641\,X\,1=641$

لذا فإنّ ١ ستكون مناسبة على الأرجح؛ وسنكتبها في الفراغين في المربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب $641\,X\,\mathbf{1}=641$ تحت الرقم 641 أسفل الربع الأيسر السفلي؛ ونجري عملية الطرح $641-\mathbf{641}=\mathbf{0}$ ونكتب الناتج أسفل الربع الأيسر السفلي؛

ونكتب ناتج عملية الجمع $642 = 1 + 641$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

32	
$\overline{10}\ \ \overline{30}\ \ \overline{41}$	3
9 –	2 X
130	62
124 –	2 +
641	641
641 –	1 +
0	642

- نكتب القيمة ١ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الثالث في الجذر التربيعي.

321	
$\overline{10}\ \ \overline{30}\ \ \overline{41}$	3
9 –	2 X
130	62
124 –	2 +
641	641
641 –	1 +
0	642

- بما أنّ القيمة الباقية في المربع الأيسر السفلي هي: صفر (٠)، ولم يتبق أي أزواج من الأرقام ليتم تنزيلها؛ فهذا يعني أننا قد حصلنا على دقة تامة للجذر التربيعي.

$$\sqrt{103041} = 321$$

{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{103041} = 321$$

}

مثال آخر:

$$\sqrt{1656.49} = ?$$

- ارسم أولًا خطًا رأسيًا يقسم مساحة العمل إلى جزئين، ثم ارسم خطًا أفقيًا قرب القمة لقسمته إلى جزء علوي صغير وآخر سفلي كبير، واكتب العدد في أقصى يسار قمة المساحة اليسرى السفلى.

1656.49

- اقسم أرقام العدد بعد ذلك لأزواج بدءًا من العلامة العشرية.

$$\leftarrow . \rightarrow$$

$$16 \quad 56 \; . \; 49$$

$\overline{16} \; \overline{56} \; . \; \overline{49}$	

- ثم نتحرك مع أزواج الأرقام من أقصى اليسار إلى أقصى اليمين؛ ونبدأ بالزوج الأول من الرقم، ونجد أكبر مربع كامل يقل عنه أو يساويه؛ ثم نأخذ الجذر التربيعي لهذا المربع الكامل.

$$16\ (4^2) \leq 16\ < 25\ (5^2)$$

أكبر مربع كامل يقل عن 16 أو يساويه هو $16 = (4^2)$

فيكون أكبر جذر تربيعي لمربع كامل أقل أو يساوي ١٦ هو ٤.

$$n = 4$$

اكتب هذه القيمة n في أقصى يسار المساحة العلوية اليسرى؛ {فهذا هو أول رقم من إجابتنا}:

4	
$\overline{16} \; \overline{56} \; . \; \overline{49}$	

• اكتب مربع هذه القيمة n (أي $16 = 4^2 = n^2$) تحت زوج الأرقام الأول في أقصى اليسار، واطرحه منه، واكتب النتيجة تحته:

$$16 - 16 = 0$$

4	
$\overline{16}\ \ \overline{56}\ .\ \overline{49}$ 16 – 0	

• كذلك اكتب هذه القيمة n (أي $n = 4$) في الربع السفلي الأيمن واضربه بالرقم ٢ {أي ضاعفه}؛ واكتب النتيجة تحته:

$$4\ X\ 2 = 8$$

4	
$\overline{16}\ \ \overline{56}\ .\ \overline{49}$ 16 – 0	4 2 X 8

بداية حلقة التكرار:

- انقل الجزء التالي من الرقم الذي نحسب جذره التربيعي {أنزل الزوج التالي: أي 56 في مثالنا}؛ بجوار القيمة المطروحة التي وجدناها قبل خطوتين؛ {٠}، في الربع الأيسر السفلي.

4	
$\overline{16}\ \ \overline{56}\ .\ \overline{49}$ 16 – 056	4 2 X 8

- خصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم ٨ إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

4	
$\overline{16}\ \ \overline{56}\ .\ \overline{49}$ 16 – 056	4 2 X 8 ? ?

- نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٨ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، ولا بد أن يكون هذا الرقم أكبر رقم صحيح يجعل ناتج عملية الضرب في الربع الأيمن السفلي { $8?\ X\ ?$ } أصغر من أو يساوي الرقم الحالي الموجود على اليسار 56 ؛ وهذا الرقم يكون محصوراً بين ١ و ٩.

$1:\ 81\ X\ 1 = 81$

وبما أنّ 81 ليس أقل من 56 لذا فإنّ قيمة صفر (٠) ستكون هي المناسبة في هذه الحالة؛ وسنكتبها بجوار الرقم ٨ إلى يمينه في الربع الأيمن السفلي، ونكتب القيمة صفر (٠) في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الثاني في الجذر التربيعي.

40	
$\overline{16}\ \ \overline{56}\ .\ \overline{49}$	4
16 –	2 X
56	80

نهاية حلقة التكرار.

- نكتب الفاصلة العشرية {العلامة العشرية}، حين نصل إليها؛ مباشرة في إجابتنا في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}.

40.	
$\overline{16}\ \ \overline{56}\ .\ \overline{49}$	4
16 –	2 X
56	80

نكرر حلقة التكرار:

- انقل وأنزل الجـــــــزء التالي من الرقم الذي نحسب جذره التربيعي {الزوج التالي: أي 49 في مثالنا}؛ بجـــــــوار القيمة الموجودة في الربع الأيسر السفلي؛ إلى يمينها، وخصص مساحة لعملية الضرب التي ستجريها في الخطوة التالية بتهيئة فراغ لرقم واحد بجوار الرقم 80 إلى يمينه وفراغ آخر أسفل منه لرقم واحد في الربع الأيمن السفلي متبوعًا بعلامة الضرب.

40.	
$\overline{16}\ \ \overline{56}\ .\ \overline{49}$	4
16 –	2 X
5649	80 ?
	?

- نخمن رقماً ونضعه نفسه في الفراغ بجوار الرقم ٨٠ إلى يمينه وفي الفراغ الآخر الذي أسفل منه، بحيث يكون هذا الرقم أكبر رقم صحيح يجعل ناتج عملية الضرب $\{80?\ X\ ?\}$ أصغر من أو يساوي الرقم الحالي الموجــود على اليسار 5649 ؛ أي: $80?\ X\ ? \leq 5649$ وهذا الرقم يكــــــــــون بين ١ و ٩.

$7:\ 807\ X\ 7 = 5649$

ومن الواضح لنا أنّ ٧ ستكون مناسبة تماماً؛ وسنكتبها في الفراغين في الربع الأيمن السفلي؛ ونكتب ناتج عملية الضرب$807\ X\ 7 = 5649$ تحت الرقم 5649 أسفل الربع الأيســــــر السفلي؛ ونجري عملية الطرح

$5649 - 5649 = 0$ ونكتب الناتج أسفل الربع الأيسر السفلي؛

ونكتب ناتج عملية الجمع $807 + 7 = 814$ أسفل الربع الأيمن السفلي:

40.	
$\overline{16}\ \overline{56}\ .\ \overline{49}$	4
16 –	2 X
5649	807
5649 –	7 +
0	814

• نكتب القيمة ٧ في الربع الأيسر العلوي {إلى يمين الأرقام السابقة}؛ وهذا هو الرقم الثالث في الجذر التربيعي.

40.7	
$\overline{16}\ \overline{56}\ .\ \overline{49}$	4
16 –	2 X
5649	807
5649 –	7 +
0	814

- بما أنّ القيمة الباقية في الربع الأيسر السفلي هي: صفر (٠)، ولم يتبق أي أزواج من الأرقام ليتم تنزيلها؛ فهذا يعني أنّنا قد حصلنا على دقة تامة للجذر التربيعي.

$$\sqrt{1656.49} = 40.7$$

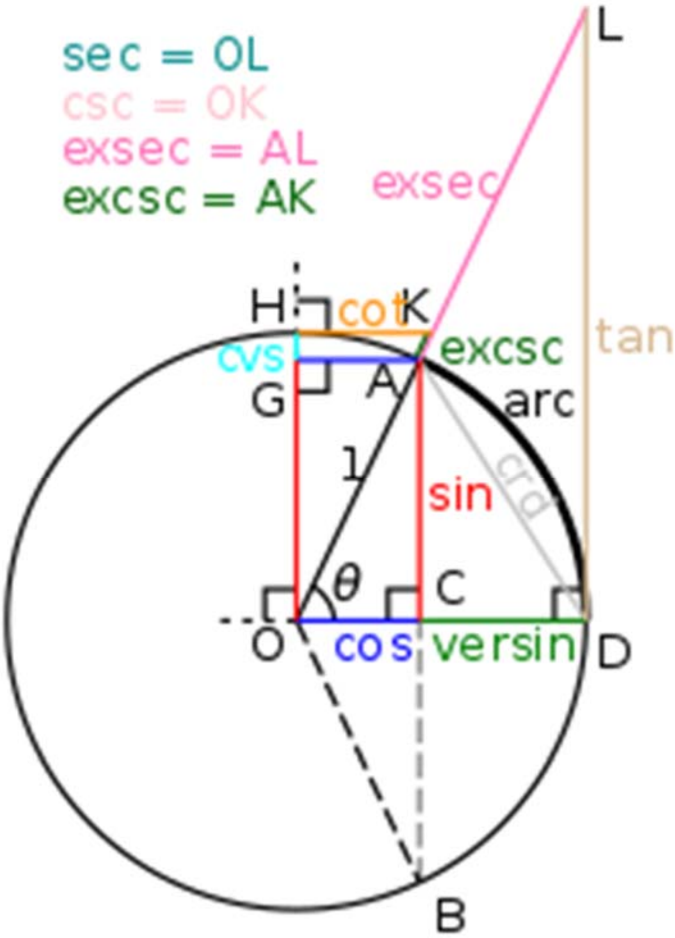
{باستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sqrt{1656.49} = 40.7$$

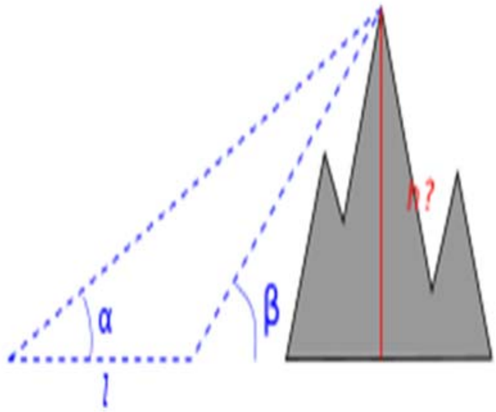
}

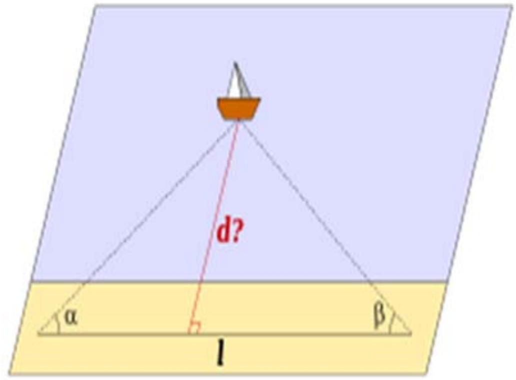
الدَّوَالُّ الْمُثَلَّثِيَّةُ

في الرياضيات، الدَّوَالّ المُثَلَّثِيَّة أو التَوَابع المُثَلَّثِيَّة أو الاِقْتِرَانَات المُثَلَّثِيَّة، وتُسمَّى أيضاً الدَّوَالّ المُثَلَّثَاتِيَّة أو الدَّوَالّ الدَائِرِيَّة؛ هي مجموعة من الدوال الحقيقية التي تربط زاوية مثلث قائم مع نسبة ضلعين من أضلاعه، ويُمكن تعريفُ الدَّوَالّ المُثَلَّثِيَّة على أنّها نسبةٌ بين أضلاعِ مُثلثٍ قائمٍ يَحتوي تلك الزاويةَ أَو بشكل أكثر عموميةٍ؛ إحداثياتٍ على دائرة الوحدة، وعند الإشارة إلى المثلثات، غالباً يُقصدُ المثلثُ في السَطح المستوي؛ وذلك ليكون مجموعُ الزوايا 180 ° دائماً، والدوال المثلثية من أهم محاور علم المثلثات والذي يعد أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بالزوايا وتطبيقها على الحسابات، وهناك ست دوال مثلثية في علم المثلثات هي: الجيب (Sin)، وجيب التمام (Cos)، والظل (Tan)، وظل التمام (Cot)، والقاطع (Sec)، وقاطع التمام (Csc)، وقد تم اشتقاق هذه الدوال المثلثية الست بالنسبة إلى المثلث قائم الزاوية.

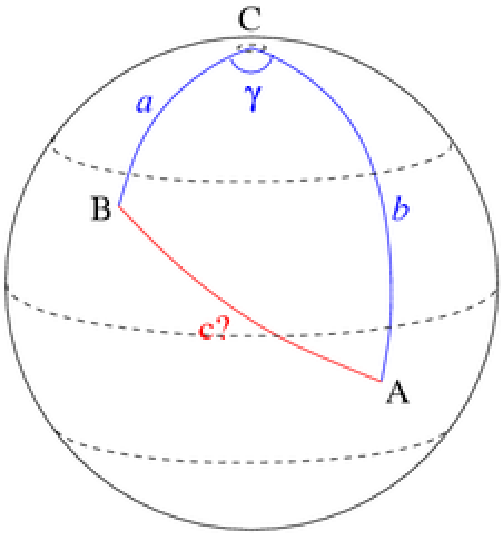


التطبيق الرئيسي للدَّوَالّ المُثَلَّثِيَّة هو حساب أطـــــــــوال الأضلاع وزوايا المثلث والعوامل الأخـــــرى ذات الصلة، ويستخدم هذا التطبيق على مدىً واسعٍ في علـــــوم مختلفة مثل علم المساحة، والملاحة، ومجالات الفيزياء المختلفة؛ ففي علم المساحة: تتمثل في عملية التثليث التي تستخـدم لحساب إحداثيات نقطـــة معينـــة والتي تُستخـــــدم حاليًا في القياس البصــــري ثلاثي الأبعاد؛



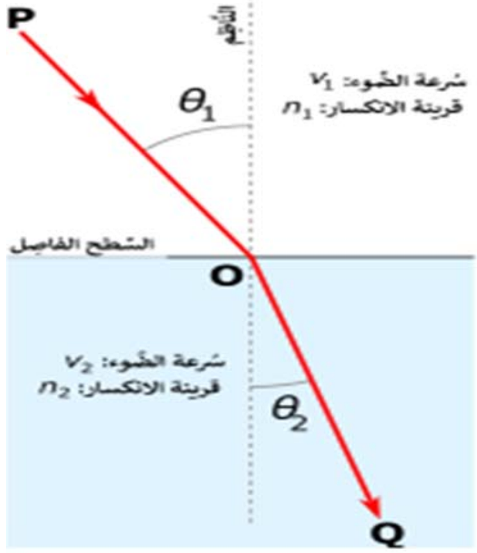


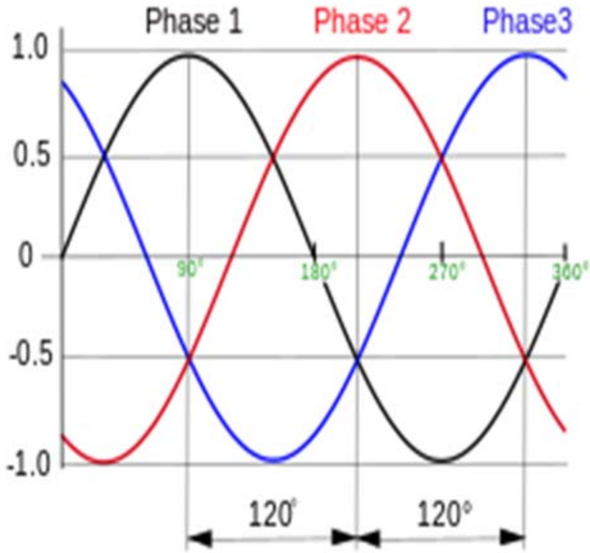
وفي الملاحة: في حساب إحداثيات السفن ورسم المسارات وحساب المسافات أثناء الملاحة؛



وفي الجغرافيا: حساب مسافة بين نقطتين على الكرة الأرضية، وتحديد إتجاه القبلة بحساب زاويتها بالنسبة للشمال؛

وفي البصريات: تستخدم أساسا في دراسة ظاهرة انكسار الضوء.



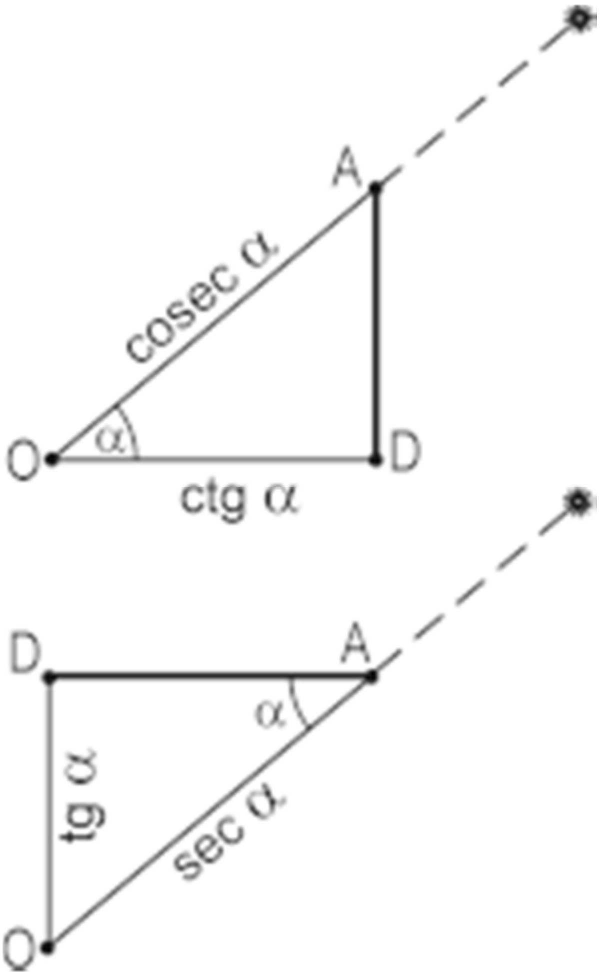


الدوال المثلثية دوال دوريَّةٌ، أي أنها تُكــــرر قيمتها بعــــد مجال محــدد؛ ولهذا فإنها تُستعمل لتمثيل الظواهرِ المتكـــررة كالموجات؛ وتشمل الاستخدامات الأخرى للدوال المثلثية في صناعـــة الطاقـــة الكهربائية والاتصالات، ويشمل هذا تطبيق دراسة التيارات المتناوبة والتضمين التي تعتمد على موجات جيبية.

لقد تطور علم المثلثات بسبب الحاجة لحساب الزوايا والمسافات في مجالات علمية عديدة، ويعود حساب المثلثات إلى ما قبل الميلاد، وقد حقق العلماء المسلمون، تقدمًا ملحوظًا في علم المثلثات؛ فبرز الخوارزمي والبتاني وأبو الوفاء محمد البوزجاني وغيرهم؛ فخلال القرن التاسع الميلادي، كانت الدوال المثلثية الست المستعملة في العصر الحديث جزءاً من الرياضيات المستعملة في الحضارة الإسلامية، كما كان قانون الجيب معروفاً، وكان يستعمل في معضلة حل المثلثات؛ وباستثناء دالتي الجيب وجيب التمام التي اعتمدت من الهنود، فقد اكتُشِفَت الدوال المثلثية الأربع الأخرى من قبل علماء الرياضيات المسلمين، بما في ذلك الظل وظل التمام والقاطع

وقاطع التمام؛ حيث تنسب أقدم الأعمال المتبقية إلى الخوارزمي وحبش الحاسب اللذين اعتبرا الدوال الأربعة الأخيرة؛ ففي أوائل القرن التاسع الميلادي، أنتج محمد بن موسى الخوارزمي جداول دقيقة لدوال الجيب والجيب التمام وأول جدول للظلال، كما أنّه أنتج نسخة معدلة من زيج السندهند (تتضمن جدولاً للجيوب) التي استعملت لحل المعضلات الفلكية؛ وفي القرن نفسه، قام حبش الحاسب بإنتاج أول جدول لظل التمام.

في البداية، عُرّفت الدوال الأربعة الأخيرة بطريقة تختلف عن الرياضيات الحديثة؛ حيث اعتبرت ظل التمام، التي كانت تسمى «الظل المستوي» أنذاك، طول خيال مقياس عمودي ارتفاعه ١٢ (أحيانًا ٧) أصابع؛ بينما اعتبرت دالة الظل، التي كانت تسمى "الظل المعكوس"، طول خيال مقياس أفقي؛ وفي الأصل، استُخدمت هذه المفاهيم للحساب بالمزولة.



وكان يسمى وترا المثلث القائم (القطعة AO في الصورة المجاورة) "قطر الظل الأول" (في الحالة الثانية) و"قطر الظل الثاني" (في الحالة الأولى) اللذان يطلق عليهما الآن: القاطع وقاطع التمام، على التوالي.

في القرن العاشر ميلادي، قدم الفيلسوف وعالم الرياضيات الفارابي، في كتابه "شرح كتاب المجسطي"؛ تعريفات هذه الدوال الأربع بشكل مستقل عن المزولات، وقام بتعريفها مع الجيب وجيب التمام في الدائرة المثلثية البطلمية التي طول نصف قطرها ٦٠ (نصف القطر معبر عنه بالنظام الستيني)، ووضع محمد بن جابر البتاني العلاقات الأساسية بين الدوال الست في القرن نفسه، وتم تحقيق التوحيد النهائي من قبل أبو الوفاء البوزجاني في النصف الثاني من القرن العاشر؛ والذي استخدم لأول مرة دائرة الوحدة لتعريف الدوال المثلثية، كما هو الحال في الرياضيات الحديثة، وقام محمد بن جابر البتاني باكتشاف قانون جيب التمام للمثلثات الكروية، وفي القرن العاشر، اكتشف أبو الوفاء البوزجاني تلك المتطابقات المثلثية في شكلها الحالي، حيث عبر الرياضياتيون اليونانيون عنها بدلالة الأوتار:

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

ويقال عنه أنه أول من اكتشف قانون الجيب للمثلثات الكروية.

طُوِّرت طريقة التثليث لأول مرة من قبل علماء الرياضيات المسلمين، الذين طبقوها على الاستخدامات العملية مثل مسح الأراضي والجغرافيا الإسلامية، كما وصفها أبو الريحان البيروني في كتابه "القانون المسعودي" في أوائل القرن الحادي عشر، وأدخل البيروني نفسه تقنيات التثليث لقياس حجم الأرض والمسافات بين الأماكن المختلفة، وفي نهاية القرن الحادي عشر، حل عمر الخيام معادلات من الدرجة الثالثة عن طريق الحلول العددية التقريبية التي تم الحصول

عليها عن طريق استيفاء الجداول المثلثية، وفي القــــــــرن الثالث عشر، اعتبر نصير الدين الطوسي لأول مرة حساب المثلثات تخصّصًا منفصلاً عن علم الفلك، وذكر في كتابه "شكل القطاع" قانوني الجيب أحدهما للمثلثات المستوية والآخر للمثلثات الكروية، واكتشف قانـــون الظل للمثلثات الكروية، وفي القرن الخامس عشر، قام غياث الدين الكاشي بالتعبير عن مبرهنة فيثاغورس المعممة، التي يطلق عليها الآن "قانون جيب التمام"، بدلالة جيب التمام بعدما أنشئت جداول لها والتي أتاحت له صياغة المبرهنة، والبرهنة عليها في كتابه "مفتاح الحساب"؛ لذلك، أطلق الفرنسيون على هذا القانون اسم "مبرهنة الكاشي" تكريما له؛ وقدم بياناً صريحاً لهذا القانون في شكل مناسب للتثليث؛ مع العلم أن هذه المبرهنة تم التعبير عنها سابقًا من قبل العالم اليوناني إقليدس في كتابه الأصول، ولكن عدم وجود الدوال المثلثية آنذاك وكذلك الجبر أدى إلى استعمال مجموع وفرق المساحات، وقام الكاشي أيضًا بصياغة المتطابقة التالية :

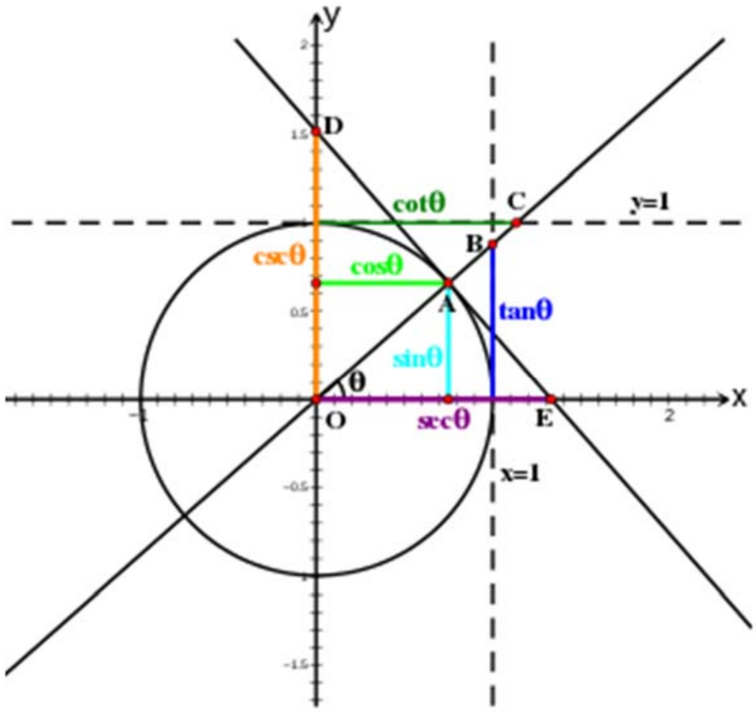
$$\sin(3\emptyset) = 3\sin(\emptyset) - 4\sin^3(\emptyset)$$

واستخدمها لحساب جيب الزاوية ١° بوضع $\emptyset = 1°$ و $x = \sin 1°$:

ثم حل المعادلة مــــــــن الدرجة الثالثة المتحصل عليها، ووصــــــــل إلى ١٦ منزلة عشرية؛ وهذه الصيغة معروفة عند الغربيين بـ"صيغة فييت"، ونسبوها إلى فرانسوا فييت عـــــــن طريق الخطأ، ولكن الكاشي هو أول من أكتشف تلك الصيغة، ووضع الرياضياتي وحاكم الدولة التيمورية أولوغ بيك جداول دقيقة للجيب والظل ووصل إلى ٩ أرقام عشرية بعد الفاصلة في نفس الوقت تقريبًا.

الصيغ الأساسية للدوال المثلثية:

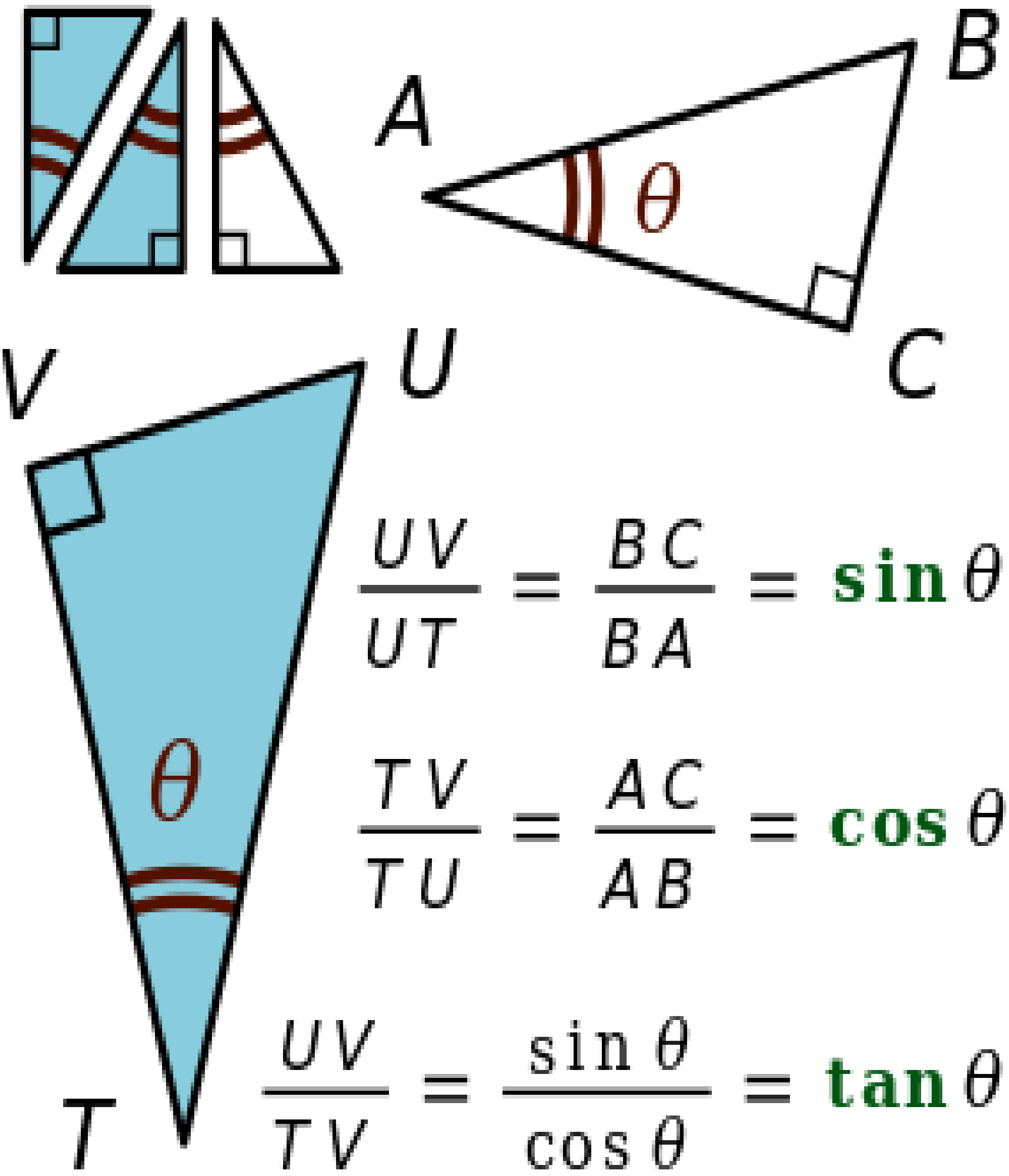
هناك ست دوال مثلثية أساسية مستخدمة في علم المثلثات هي: الجيب، وجيب التمام، والقاطع، وقاطع التمام، والظل، وظل التمام؛ حيث أنّ الدوال المثلثية هي نسبة أضلاع مثلث قائم الزاوية إلى بعضها؛



وهي الضلع العمودي، والوتر، والقاعدة؛ حيث يتم إيجاد قيمة الدوال المثلثية بالاستناد لأضلاع المثلث القائم وفق الصيغ التالية:

- جيب الزاوية (sin θ): وهو ناتج قسمة قيمة الضلع المقابل للزاوية على قيمة وتر المثلث القائم.
- جيب التمام للزاوية (cos θ): وهو ناتج قسمة قيمة الضلع المجاور للزاوية على قيمة وتر المثلث القائم.
- ظل الزاوية (tan θ): وهو ناتج قسمة قيمة الضلع المقابل للزاوية على قيمة الضلع المجاور لها.
- قاطع الزاوية (sec θ): وهو ناتج قسمة قيمة وتر المثلث قائم الزاوية على قيمة الضلع المجاور لها.

- قاطع تمام الزاوية (cosec θ): وهو ناتج قسمة قيمة وتر المثلث قائم الزاوية على قيمة الضلع المقابل لها.
- ظل تمام الزاوية (cot θ): وهو ناتج قسمة قيمة الضلع المجاور للزاوية على قيمة الضلع المقابل لها.



وحدات قياس الزوايا:

- الدرجة: يعود استخدامها إلى عصور قديمة؛ وتُحسبُ هذه القيمة عن طريق تقسيم دائرة إلى ٣٦٠ جزءا متساويا، ويشار إليها بقيمة متبوعة بدائرة صغيرة علوية.

في التطبيقات الهندسية، يكون متغير دالة مثلثية عمومًا هو مقياس الزاوية، ويتم قياس الزوايا في أغلب الحالات بالدرجات.

- الراديان أو الزاوية نصف القطرية أو التقدير الدائري: يساوي الزاوية المقابلة لقوس طوله مطابق لطول نصف قطر الدائرة، ودورة كاملة هي: زاوية مقدارها ٢ π راديان؛ وهناك وحدة مشتقة من الراديان وهي الميليراديان، وتُعرَّف على أنها جزء من الألف من ١ راديان.

عند استخدام دالة مثلثية في حساب التفاضل والتكامل، فإنّ متغيرها ليس عمومًا زاوية، لكنه بالأحرى عدد حقيقي، وفي هذه الحالة، فمن الملائم أكثر التعبير عن المتغير المثلثي طول قوس دائرة الوحدة المحددة بزاوية رأسها مركز الدائرة؛ لذلك، يُستخدم الراديان وحدةً للزاوية.

ميزة كبيرة للراديان هي أنّ العديد من الصيغ تكون أبسط بكثير عند استخدامها، وعادة كل الصيغ المتعلقة بالمشتقات والتكاملات.

بشكل عام، عندما تكون وحدة الزاوية غير محددة بوضوح، يتم التعبير دائمًا عن متغيرات الدوال المثلثية بالراديان.

- الغراد: تعادل $\frac{1}{400}$ من قياس الدائرة الكاملة، أو جزء من ١٠٠ جزء من الزاوية القائمة، ويشار إليها بقيمة متبوعة بحرف "g" صغير علوي.
- الدورة: تعادل ٣٦٠° أو ٢ π راديان.
- دقيقة وثانية القوس: هي وحدات فرعية للدرجة، تستخدم على مدى واسع في نظام الاحداثيات الجغرافية.

- دقيقة القوس: تساوي $\frac{1}{60}$ درجة أي ٠,٠١٦°، يشار إليها بقيمة متبوعة بالبرايم (′).
- ثانية القوس: تساوي $\frac{1}{3600}$ درجة أي ٠,٠٠٠٢٧°، يشار إليها بقيمة متبوعة بعلامة التنصيص (″).

قانون الجيب:

ليكن ABC مثلث، وa وb وc أضلاعه.

ينص قانون الجيب على ما يلي:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\Delta}{abc}$$

حيث تشير Δ إلى مساحة المثلث، أو بشكل مكافئ:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

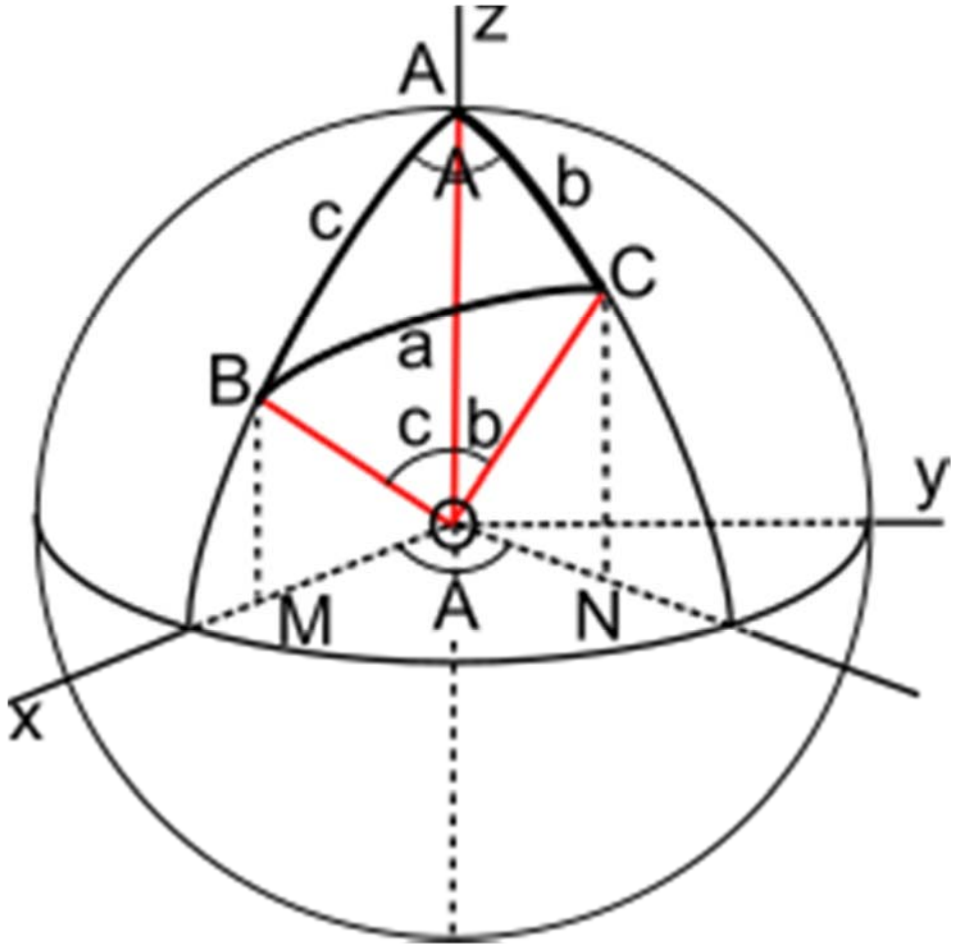
حيث يشير R إلى نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث.

يمكن إثبات ذلك بتقسيم المثلث إلى مثلثين قائمين وباستخدام التعريف الوارد أعلاه للجيب.

قانون الجيب مفيد في حساب أطوال الأضلاع المجهولة في مثلث إذا كانت هناك زاويتان وضلع واحد معلومتان.

هذا هو الموقف الشائع الذي يحدث في التثليث، وهي تقنية لتحديد مسافات غير معروفة عن طريق قياس زاويتين ومسافة مغلقة يمكن الوصول إليها.

في حالة المثلثات الكروية، ينص القانون على ما يلي:



$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

حيث a و b و c هي أقواس المثلث الواقع في سطـــح الكرة (والتي يطلق عليها مجازًا أضلاع وتسمى أحيانًا جوانب المثلث الكروي)؛ و A و B و C هي الزوايا المقابلة.

قانون جيب التمام:

يعتبر قانون جيب التمام تعميمًا لمبرهنة فيثاغورس على جميع أنواع المثلثات المستوية، ويسمى أيضا مبرهنة الكاشي:

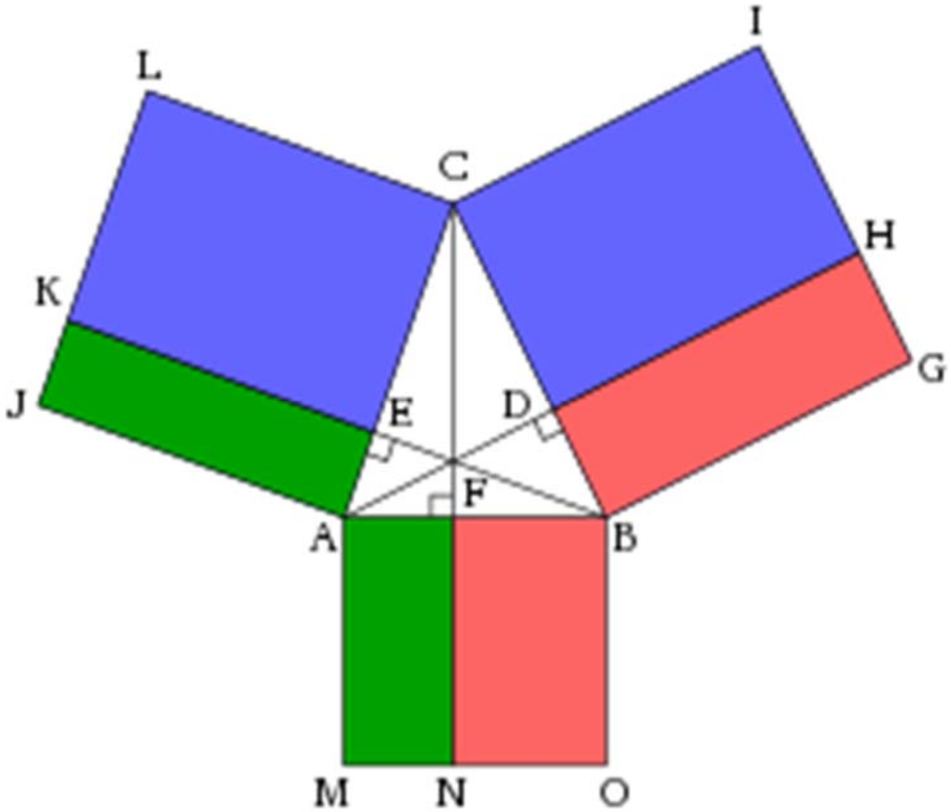
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

وقد تكتب بالشكل:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

حيث C هي الزاوية المقابلة للضلع c.

يمكن إثبات هذه المبرهنة بتقسيم المثلث إلى مثلثين قائمين وباستخدام مبرهنة فيثاغورس، أو باستخدام طريقة الكاشي المبينة في الشكل:



طريقة الكاشي لبرهنة قانون جيب التمام بالنسبة للمثلثات الحادة (باستخدام مثلث حاد محاط بثلاثة مربعات)؛ حيث أنّ المستطيلين الأخضرين متقايسان

والمستطيلين الأحمرين أيضًا متقايسان، يمكن إثبات تقايس المستطيلين الأخضرين بإثبات تقايس المثلثين JAE و JAB، والمثلثين JAB و CAM، والمثلثين CAM و FAM بتحريك أحد الرؤوس بالتوازي مع القاعدة وأحدهما بالدوران على أحد زوايا المربعات، ويمكن إثبات المستطيلين الأحمرين بطريقة مشابهة؛ ويمكن إثبات أنّ المستطيلين الأزرقين متقايسان ومساحة أحدهما يساوي CA × CB × cos C بمعرفة أنّ CE = CB cos C و CD = CA cos C؛ ويمكن الإثبات بالنسبة للمثلثات المنفرجة بطريقة مشابهة.

يمكن استخدام قانون جيب التمام لحساب طول ضلع المثلث إذا كان الضلعان والزاوية بينهما معلومة، ويمكن أيضًا استخدامه لإيجاد جيب تمام لأي زاوية إذا كانت أطوال كل الأضلاع معلومة.

قانون موري:

ينص هذا القانون الرياضي على أنّ جداء جيوب التمام لكل من ٢٠° و٤٠° و٨٠° يساوي $\frac{1}{8}$، بتعبير رياضي:

$$\cos(20°)\,.\cos(40°)\,.\cos(80°) = \frac{1}{8}$$

وبدلالة الجيب:

$$sin(20°)\,.\sin(40°)\,.sin(80°) = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

وعند تقسيم المتطابقة الثانية على الأولى تنتج متطابقة أخرى:

$$tan(20°)\,.\tan(40°)\,.tan(80°) = \sqrt{3} = tan(60°)$$

المتطابقات المثلثية:

فيما يلي أهم المتطابقات المتعلقة بدوال حساب المثلثات:

- المتطابقات الزوجية والفردية.
- متطابقات فيثاغورس.
- الاقترانات الدورية.
- متطابقات الإنعكاس والإزاحة.
- متطابقات المجموع والفرق.
- صيغ الزوايا المتعددة.
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات ثلاثية الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.
- صيغ اختصار الأس.

المتطابقات الزوجية والفردية:

الدالتان جتا (cos) وقاطع الزاوية (sec) هما دالاتان زوجيتان، أما باقي الدوال المثلثية فهي دوال فردية، أي أنّ قيمها تكون على الشكل التالي:

$$sin(-x) = -sin\ x$$
$$cos(-x) = cos\ x$$
$$tan(-x) = -tan\ x$$
$$cot(-x) = -cot\ x$$
$$csc(-x) = -csc\ x$$
$$sec(-x) = sec\ x$$

متطابقات فيثاغورس:

يتم التعبير عن نظرية فيثاغورس باستخدام الدوال المثلثية من خلال المتطابقات التالية:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan^2 x = sec^2 x + 1$$
$$\mathrm{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x + 1$$

الاقترانات الدورية:

الاقترانات المثلثية هي اقترانات دورية، وتكون أصغر دورة دورية هي ٢ π، لكن بالنسبة للظل وظل التمام فهي π، والاقترانات الدورية هي:

$$\sin(x+2n\pi) = \sin x$$
$$\cos(x+2n\pi) = \cos x$$
$$\tan(x+n\pi) = \tan x$$
$$\cot(x+n\pi) = \cot x$$
$$\csc(x+2n\pi) = \csc x$$

$$\sec(x+2n\pi) = \sec x$$

حيث إن n هو أي عدد صحيح.

متطابقات الإنعكاس والإزاحة:

انعكاس في $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

انعكاس في π

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$
$$\csc(\pi - x) = \csc x$$
$$\sec(\pi - x) = -\sec x$$
$$\cot(\pi - x) = -\cot x$$

إزاحة بمقدار $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\,sin\,x$$
$$tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$
$$csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sec x$$
$$sec\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\csc x$$
$$cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\tan x$$

إزاحة بمقدار π

$$sin(x+\pi) = -\,sin\,x$$
$$cos(x+\pi) = -cos\,x$$
$$tan(x+\pi) = tan\,x$$
$$csc(x+\pi) = -csc\,x$$
$$sec(x+\pi) = -sec\,x$$
$$cot(x+\pi) = cot\,x$$

متطابقات المجموع والفرق:

$$\sin(x+y) = \sin(x).\cos(y)+\cos(x).\sin(y)$$
$$\sin(x-y) = \sin(x).\cos(y)-\cos(x).\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x).\cos(y)-\sin(x).\sin(y)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x).\cos(y)+\sin(x).\sin(y)$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}$$

صيغ الزوايا المتعددة:

$$cos\, nx = T_n(cos\, x)$$

حيث أنّ: T_n هو متعدد الحدود لشيبيشيف من الدرجة n:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

فيكون:

$$cos\, nx = T_n(cos\, x)$$
$$\cos 0x = T_0(\cos x) = 1$$
$$\cos 1x = T_1(\cos x) = \cos x$$
$$\cos 2x = T_2(\cos x) = 2(\cos x)(\cos x) - (\cos 0x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 3x = T_3(\cos x) =$$
$$= 2(\cos x)T_2(\cos x) - T_1(\cos x)$$
$$= 2(\cos x)(2\cos^2 x - 1) - \cos x$$
$$= 4\cos^3 x - 2\cos x - \cos x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\cos 4x = T_4(\cos x) =$$
$$= 2(\cos x)T_3(\cos x) - T_2(\cos x)$$
$$= 2(\cos x)(4\cos^3 x - 3\cos x) - (2\cos^2 x - 1)$$
$$= 8\cos^4 x - 6\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

وهكذا ....

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^3 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$
$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

صيغة دي موافر:

$$cos\, nx + i\, sin\, nx = (cos\, nx + i\, sin\, nx)^n$$
$$(cos\, nx + i\, sin\, nx)^2 = cos\, 2x + i\, sin\, 2x$$

حيث أنّ n هو أي عدد صحيح.

صيغة أويلر:

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sin\, x$$
$$e^{-ix} = cos(-x) + i\, sin(-x) = \cos x - i \sin x$$
$$e^{ix} = -1 \quad , i^2 = -1$$

متطابقات ضعف الزاوية:

عندما تكون الزاويتان متساويتان، فإنّ صيغ المجموع تقلص إلى معادلات أبسط تعرف باسم متطابقات ضعف الزاوية.

$$sin\, 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$
$$cos\, 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 =$$
$$= 1 - 2\, sin^2\, x = \frac{1 - tan^2\, x}{1 + tan^2\, x}$$
$$tan\, 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

متطابقات ثلاثية الزاوية:

ويُحسب كما يأتي:

$$sin\, 3x = 3\sin x - 4\, sin^3 x$$
$$= 4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$
$$cos\, 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$= 4\cos x\, cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\, cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$
$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$
$$= \tan x\, tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\, tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

متطابقات نصف الزاوية:

ويُحسب كما يأتي:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$
$$cos\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$
$$= \csc x - \cot x$$

صيغ اختصار الأس:

ويُحسب كما يأتي:

$$sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

$$cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}$$

$$sin^4 x = \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}$$

$$cos^4 x = \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}$$

$$sin^5 x = \frac{10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x}{16}$$

$$cos^5 x = \frac{10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x}{16}$$

حساب القيم الدقيقة للدوال المثلثية:

حساب القيم الدقيقة للدوال المثلثية يدوياً أمر صعب ومعقد، لكن في العصرِ الحديثِ، زالَت تعقيداته بسبب توفر أجهزة الحاسوب والآلات الحاسبة، التي تمكن بسهولة من الحصول على القيمة الدقيقة لأي زاوية.

بالنسبةِ لبعـــضِ الزوايا، فيمكن الحصــــول على القيم الجبرية الدقيقة لدوالّها المثلثية دون اللجوء إلى حساباتٍ بالأجهزة، وتُسمّى هذه الزوايا: الزوايا الخاصة.

كما أنّ قيمَ الدوال المثلثية لجميع الزوايا مــــن مضاعفات العدد ٣ دقيقةٌ؛ وتُحسَـــبُ النســـب المثلثية للزاوية ٣° بتطبيق الفـــرق بين زاويتين ذات القيم ١٨° و١٥° (١٨ - ١٥ = ٣)؛ وتُحسَبُ النسب المثلثية للزاوية ١٨° باستخدام خواص ونِسَب الخماسي المنتظم.

لحساب قيمة دالة لأي زاوية، يجب على المرء أولاً تقليص مجال الزاوية (على سبيل المثال؛ من الصفر إلى $\frac{\pi}{2}$)؛ ويتم ذلك باستخدام كل من خاصية دورية وتناظر الدوال المثلثية.

قبل الحواســـيب، حصل الناس بشكل عام على قيمة الدوال المثلثية من خلال استيفاء الجـــداول المثلثية؛ وهذه الجداول لها تاريخ طويل في علم المثلثات، وعادة ما يتم الحصـــــول على القيم في الجداول عن طريق استخدام متطابقات نصف الزاوية وضعف الزاوية، على التوالي، بدءاً بقيمة معروفة مثل ($\sin\frac{\pi}{2} = 1$).

تستخدم الحواسيب والحاسبات الحديثة مجموعةً متنوعةً من التقنياتِ لتوفير قيم الدوال المثلثية عند الطلب للزوايا الأخرى؛ وتتمثل إحدى الطرق الشائعة، خاصةً في المعالِجات الراقية ذات وحدات الفاصلة العائمة، في الجمع بين التقريب بواسطة كثير الحدود أو بواسطة الدوال الكسرية (مثل تقريب تشيبيشيف، تقريب بادي، {وعادةً ما يتعلق بالدقة العليا أو المتغيرة}، متسلسلات تايلور ومتسلسلة لوران) وتقليص المدى والبحث في الجدول — تبحث (الخوارزميات) أولاً في جدول صغير عن أقرب زاوية، ثم تستخدم كثير الحدود لحساب التصحيح. على الأجهزة الأكثر بساطة التي تفتقر إلى مضاعف العتاد، توجد خوارزمية تسمى CORDIC عالية الكفاءة، لأنها تَستَخدِم الإزاحات والإضافة والطرح فقط.

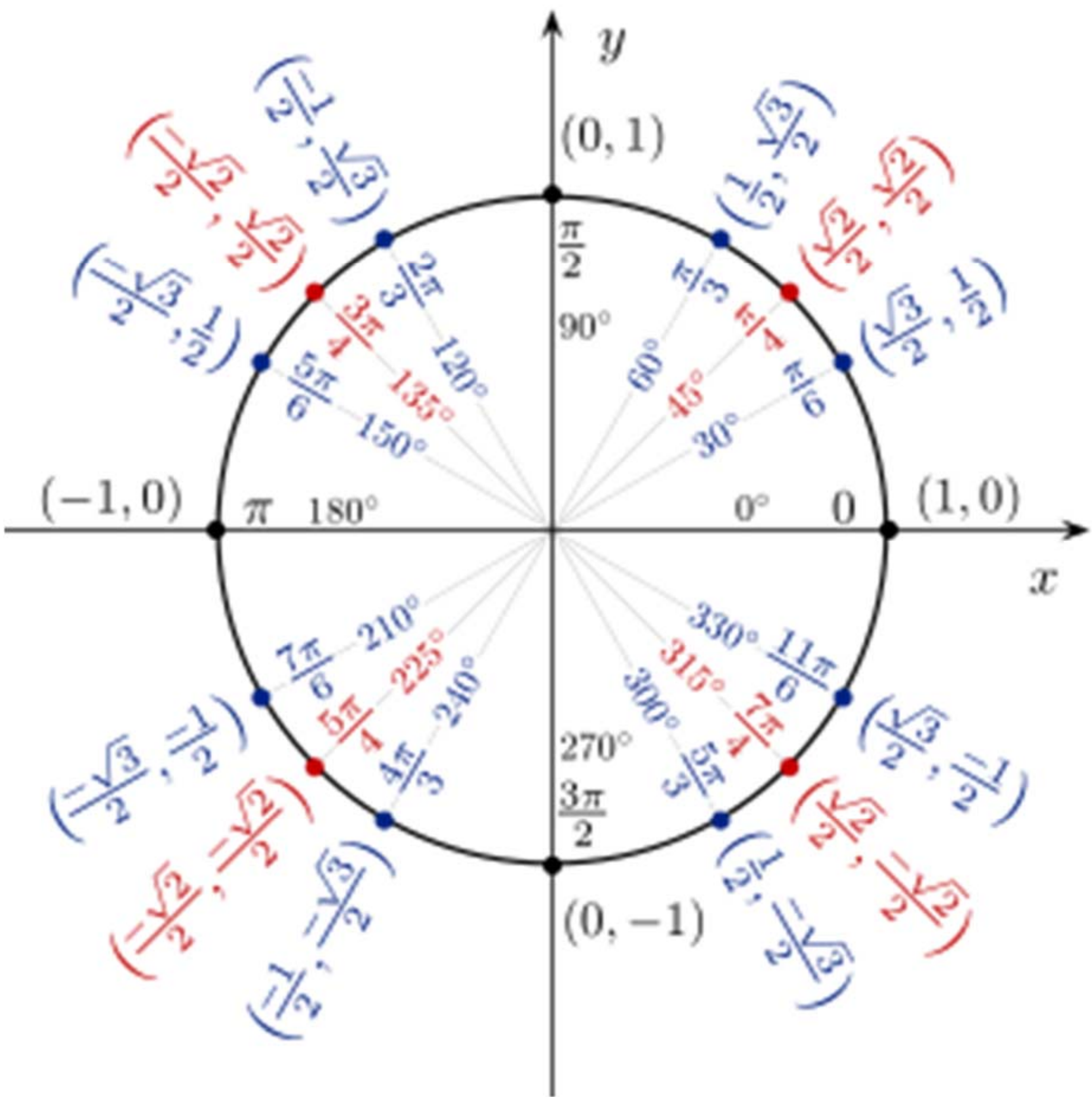
بالنسبة لحسابات عالية الدقة، عندما يصبح تقارب المتسلسلة بطيئًا للغاية، يمكن تقريب الدوال المثلثية بواسطة المتوسط الحسابي الهندسي، الذي يقارب في حد ذاته الدالة المثلثية بواسطة تكامل إهليلجي (عقدي).

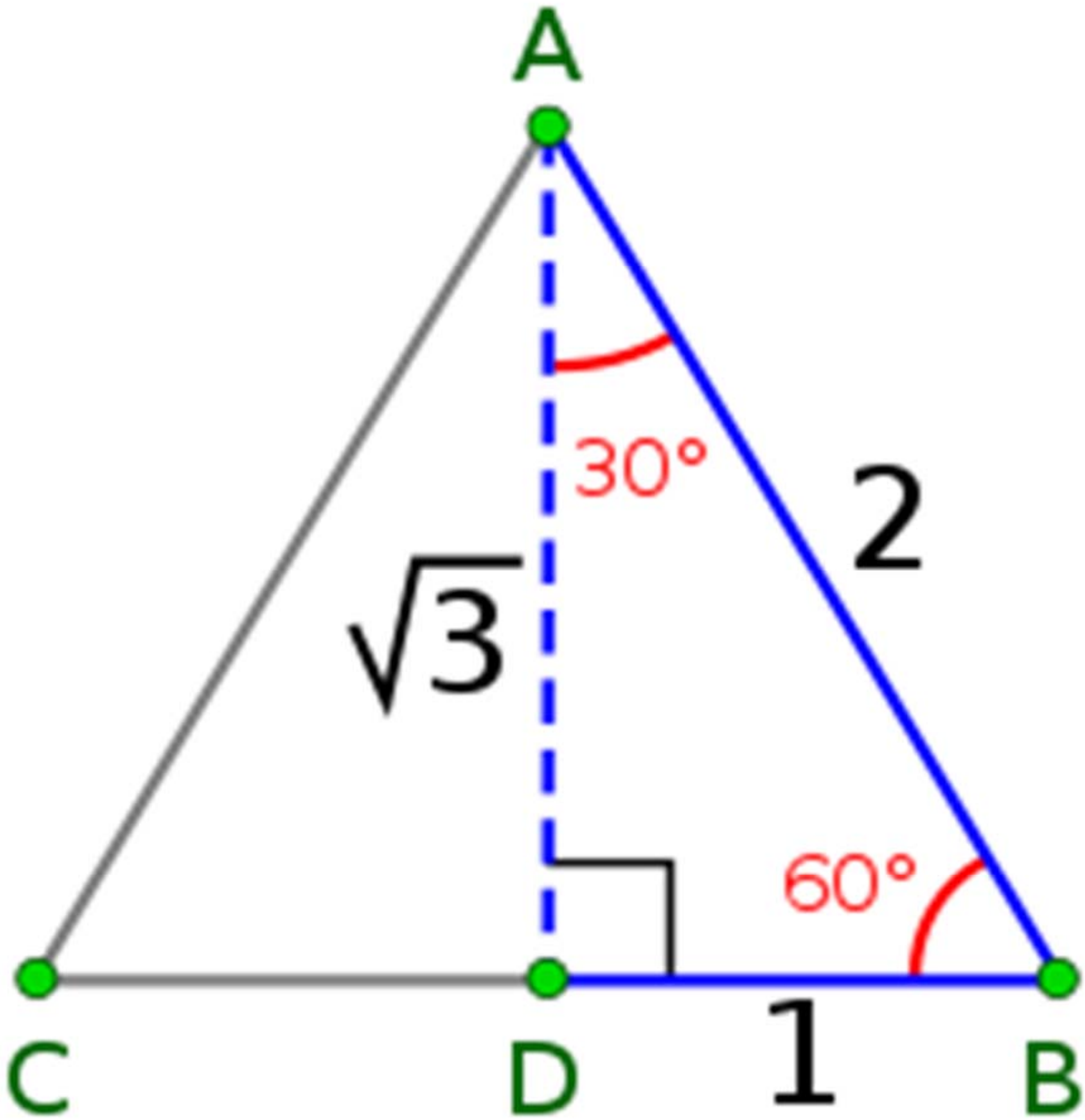
طُرُقُ حِسَابِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ:

- حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزوايا الرئيسية (الزوايا الخاصة).
- حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لزوايا أخرى مشتقة من الزوايا الرئيسية (زوايا أخرى مشتقة من الزوايا الخاصة).
- حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لجميع الزوايا من مضاعفات ٣°.
- حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لجميع الزوايا باستخدام قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية بقيمة ١°.
- حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ باستخدام طريقة المتسلسلات.
- حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ باستخدام طريقة الكسور المستمرة المعممة.
- حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ باستخدام الجداول المثلثية.

حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزوايا الرئيسية (الزوايا الخاصة):

تمثل الاقترانات الجيب وجيب التمام والظل الاقترانات الأساسية في علم المثلثات والتي يمكن اشتقاق الدوال الثلاثة ظل التمام والقاطع القاطع والتمام منها، وغالبًا ما تُستخدم الاقترانات الثلاثة المشتقة في عملية مقارنة بالوظائف المثلثية الأولية، وقيم الدوال المثلثية للزاويا المشهورة (٩٠° و٦٠° و٤٥° و٣٠° و٠°)؛ هي:





جا	جيب الزاوية	$Sin\ \theta$		قتا	قاطع تمام الزاوية	$Cosec\ \theta$
جتا	جيب تمام الزاوية	$Cos\ \theta$		قا	قاطع الزاوية	$Sec\ \theta$
ظا	ظل الزاوية	$Tan\ \theta$		ظتا	ظل تمام الزاوية	$Cot\ \theta$

درجة	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
نصف قطرية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
دورة	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
جا	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
جتا	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
ظا	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
قتا	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
قا	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
ظتا	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لزوايا أخرى مشتقة من الزوايا الرئيسية (زوايا أخرى مشتقة من الزوايا الخاصة):

يمكن حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لزوايا أخرى مشتقة من الزوايا الرئيسية (زوايا أخرى مشتقة من الزوايا الخاصة)؛ باستخدام متطابقات المجموع والفرق، وضعف الزاوية، وثلاثية الزاوية، ونصف الزاوية، ومبرهنة الكاشي، وفيثاغورس؛ وكما يأتي:

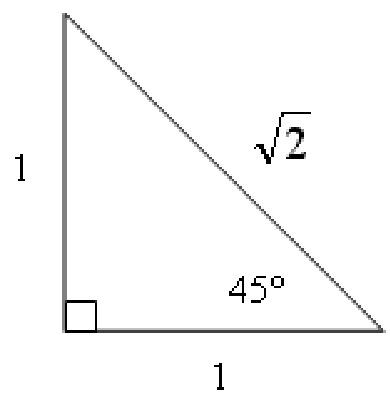
الزوايا الخاصة:

$45°$ ؛ $\{\frac{\pi}{4}\}$:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = 1$$

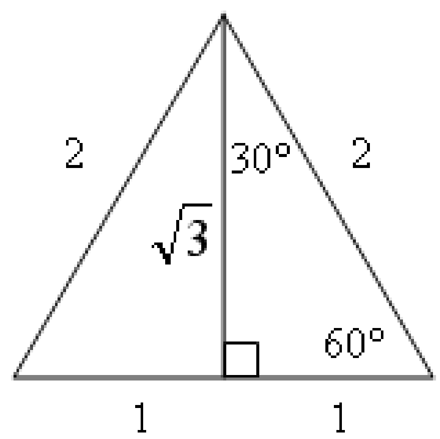


$30°$ ؛ $\{\frac{\pi}{6}\}$، و $60°$ ؛ $\{\frac{\pi}{3}\}$:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$
$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

نحسب قِيَمَ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية $15°$ ؛ $\{\frac{\pi}{12}\}$: باستخدام متطابقات المجموع والفرق:

$$sin(x+y) = sin(x).cos(y)+cos(x).sin(y)$$
$$sin(x-y) = sin(x).cos(y)-cos(x).sin(y)$$
$$cos(x+y) = cosx.cosy-sinx.siny$$
$$cos(x-y) = cosx.cosy+sinx.siny$$
$$tan(x+y) = \frac{tan\,x + tan\,y}{1 - tan\,x\,tan\,y}$$
$$tan(x-y) = \frac{tan\,x - tan\,y}{1 + tan\,x\,tan\,y}$$

لدينا:

$$15° = 45° - 30°$$
$$sin(x-y) = sin(x).cos(y)-cos(x).sin(y)$$
$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$$
$$= \sin 45° . \cos 30° - \cos 45° . \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\ X\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,X\,(\sqrt{3}\;-\;1)}{2\,X\,\sqrt{2}\,X\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\;-\;\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(45° - 30°) = \cos 15° =$$

$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\;1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\;1}{2\sqrt{2}}\;X\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,X\,(\sqrt{3}+\;1)}{2\,X\,\sqrt{2}\,X\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\;\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan(45° - 30°) = \tan(15°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (1\,X\,\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \ X \ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} =$$
$$= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2-\sqrt{3}$$

فتكون قِيَمُ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية 15 ° ؛ { $\frac{\pi}{12}$ }:

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\tan 15° = 2-\sqrt{3}$$

وحيث أنّ:

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$cos(90° - \theta) = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$tan(90° - \theta) = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

فتكون قِيَمُ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية 75 ° ؛ { $\frac{5\pi}{12}$ }:

$$\sin 75° = \cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 75° = \sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75° = \frac{\sin 75°}{\cos 75°} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} X \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{6-2} = \frac{8+2\sqrt{6}\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{8}{4} + \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{2}}{4} = \frac{8}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 2+\sqrt{3}$$

فتكون قِيَمُ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية 75 ° ؛ $\{\frac{5\pi}{12}\}$:

$$\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

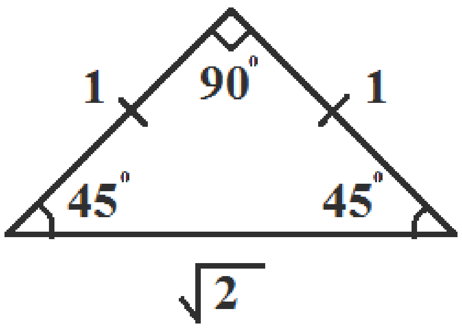
$$\tan 75° = 2+\sqrt{3}$$

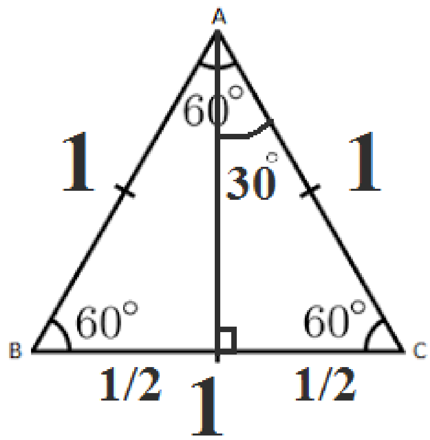
نحسب قِيَمَ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزوايا: 36 ° و 72 ° و 18 ° ؛باستخدام طريقة المثلثات متساوية الساقين {المثلثات الذهبية}؛ كما يلي:

في المثلث متساوي الساقين بزاوية رأس 2θ وجوانب طول متطابقة بطول وحدة واحدة {١}؛ نظرًا لأنّ ارتفاع المثلث متساوي الساقين يقسم زاوية الرأس والقاعدة، فلدينا:

جا $\theta = \sin\theta = \frac{1}{2} \times$ طول قاعدة هذا المثلث متساوي الساقين.

أكثر المثلثات المتساوية الساقين شيوعًا هما المثلث متساوي الأضلاع (٦٠-٦٠-٦٠ درجة) والمثلث القائم متساوي الساقين (٤٥-٤٥-٩٠)، ومنهما نحصل على صيغ الجيب المألوفة:

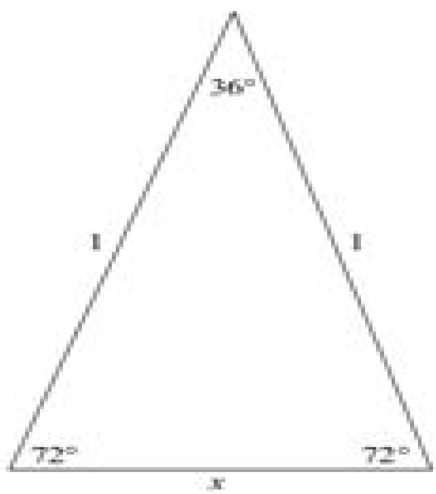




$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

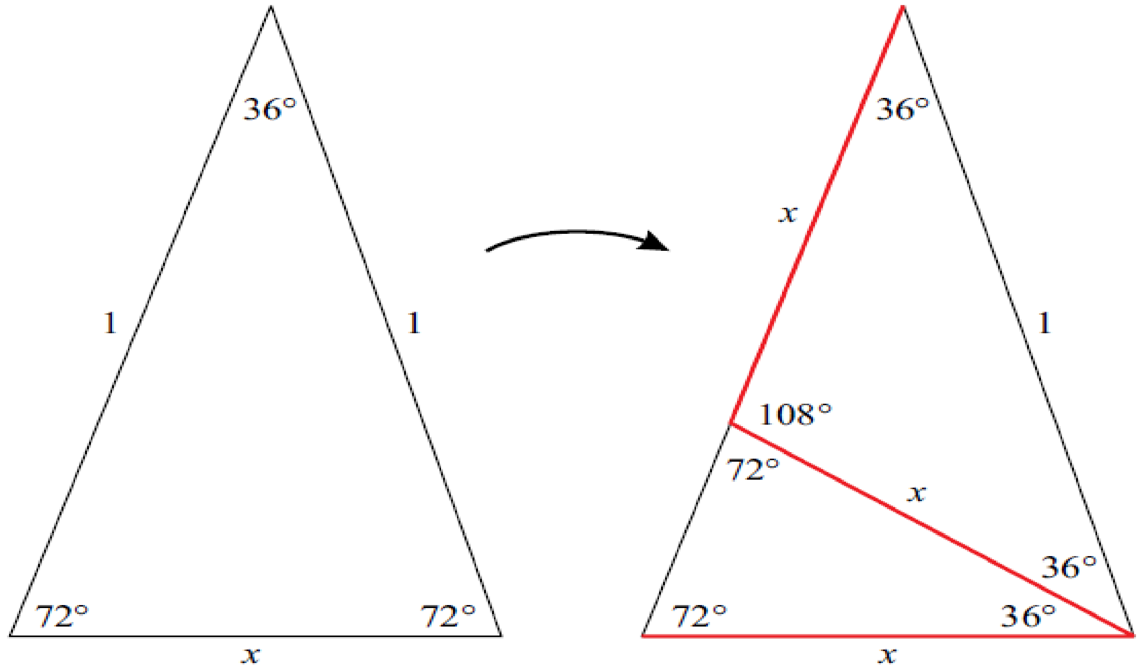
على التوالي؛ وهنالك مثلث مهم آخر غير مألوف لنا في الوقت الحاضر؛ ولكنه كان معروفًا جيدًا، وهو **المثلث الذهبي**؛



{مثلث متساوي الساقين زوايا قاعدته ضعف زاوية رأسه؛ {(2θ، θ، 2θ): وبما أنّ مجموع زوايا أي مثلث = ١٨٠ درجة؛ فتكون: 5θ = ١٨٠ أي أنّ: θ = ٣٦°}، ونستخدم هذا **المثلث الذهبي** لحساب جيب الزاوية ٣٦°.

نفترض أنّ الأضلاع المتطابقة طول كل منها ١ وأنّ طول القاعدة هو x.

نقوم بإنشاء منصف لزاوية القاعدة اليمنى؛ وهذا المنصف الذي تم إنشاؤه من خلال إحدى زوايا القاعدة سيقسم المثلث الذهبي، وسيولد لنا مثلثين أصغر منه؛



كل منهما متساوي الساقين {كما في الشكل أعلاه}؛ أحدهما قصير الإرتفاع ومنفرج زاوية الرأس؛ زواياه: (٣٦-٣٦-١٠٨ درجة)، وأضلاعه بأطوال x و x و ١ ؛

الزوايا:

$$36°\,, 36°, 108°$$

الأضلاع:

$$x\,, x, 1$$

والمثلث الآخر طويل الإرتفاع وحاد زاوية الرأس؛ زواياه: (٣٦-٧٢-٧٢ درجة)، وأضلاعه بأطوال x و x و١ – x ؛

الزوايا:

$$72°\,, 72°, 36°$$

الأضلاع:

$$x\,, x, 1 - x$$

وهذا المثلث الأخير هـــو مثلث ذهبي آخر، لذا فهو كذلك مشابه للمثلث الأكبر؛ {يقال عن مثلثين أنهما متشابهين إذا كانت الزوايا المتقابلة من كل منهما متساوية}؛ وكنتيجة لهذا التشابه: فإنّ أطوال الأضلاع المتقابلة بين المثلثين المتشابهين تكون متناسبة؛ وكالتالي:

$$\frac{x}{1-x}=\frac{\mathbf{1}}{x}$$

نقوم بحل المعادلة للحصول على قيمة x.

بضرب الطرفين والوسطين نحصل على:

$$x\ X\ x = 1\ X\ (1-x)$$
$$x^2 = 1 - x$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$

{بطريقة الصيغة التربيعية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

}

سيكون لدينا:

$$a = 1\,, \qquad b = 1\,, \qquad c = -1$$

إذن:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4\ X\ 1\ X - 1)}}{2\ \mathrm{X}\ 1}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-(-4)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

وبما أنّ طول ضلع المثلث لا يمكن أن يكون سالباً؛ فسنهمل القيمة السالبة؛ فيكون لدينا:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}\ - 1}{2}$$

وبما أنّه في المثلث متساوي الساقين بزاوية رأس 2θ وجوانب طول متطابقة بطول وحدة واحدة {١}؛ ولأنّ ارتفاع المثلث متساوي الساقين يقسم زاوية الرأس والقاعدة، فلدينا:

جا θ = $\sin \theta = \frac{1}{2}$ × طول قاعدة هذا المثلث متساوي الساقين.

لدينا في **المثلث الذهبي**؛ زاوية الرأس = ٣٦°: أي أنّ:

$$2\,\theta = 36\,°$$
$$\theta = 18\,°$$

فنحصل على:

$$\sin 18\,° = \frac{1}{2}\ X\ \frac{\sqrt{5}\ - 1}{2} = \frac{\sqrt{5}\ - 1}{4}$$
$$\sin 18\,° = \frac{\sqrt{5}\ - 1}{4}$$

وحيث أنّ:

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$cos\,18\,° = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}\ - 1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{(\sqrt{5}\ - 1)^2}{4^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}{4^2}} = \sqrt{\frac{4^2}{4^2} - \frac{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}{4^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4^2}{4^2} - \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\, X \sqrt{5}\, X\, (-1) + (\,-1)^2}{4^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{4^2} - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{16 - 5 + 2\sqrt{5} - 1}{4^2}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{4^2}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$cos\, 18\,° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 18\,° = \frac{\sin 18\,°}{\cos 18\,°} = \frac{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$$

$$\tan 18\,° = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

وحيث أنّ:

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$cos(90° - \theta) = \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$tan(90° - \theta) = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$72° = 90° - 18°$$

فيكون:

$$sin\ 72° = \cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$
$$cos\ 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$
$$tan\ 72° = \cot 18° = \frac{\cos 18°}{\sin 18°} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1}$$

وباستخدام متطابقات ضعف الزاوية.

$$sin\ 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$
$$cos\ 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 =$$
$$= 1 - 2\,sin^2 x = \frac{1 - tan^2 x}{1 + tan^2 x}$$
$$tan\ 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$
$$36° = 2\ X\ 18°$$

فيكون:

$$sin\ 36° = sin\ 2\ X\ 18° = 2\sin 18°\cos 18° =$$
$$= 2\ X\ \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\ \mathrm{X}\ \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} =$$
$$= 2\ X\ \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\ \mathrm{X}\ \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}\ - 2}{4}\ X\ \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{5}\ - 2\right) \boldsymbol{X} \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,\right)}{4\ X\ 4} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(2\sqrt{5}\ - 2\right)^2 X\ (10 + 2\sqrt{5})}}{4\ X\ 4} =$$

$$= \frac{\sqrt{(20\ - 8\sqrt{5} + 4)\ X\ (10 + 2\sqrt{5})}}{4\ X\ 4} =$$

$$= \frac{\sqrt{200 + 40\sqrt{5} - 80\sqrt{5} - 80 + 40 + 8\sqrt{5}}}{4\sqrt{16}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{160 - 32\sqrt{5}}{16}}}{4} = \frac{\sqrt{\frac{160}{16} - \frac{32\sqrt{5}}{16}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 36° = \cos 2\ X\ 18° = 1 - 2\sin^2 18° =$$

$$= 1 - 2\ X\ \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = 1 - 2\ X\ \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}$$

$$= \frac{16}{16} - \frac{10 - 4\sqrt{5} + 2}{16} = \frac{16 - 10 + 4\sqrt{5} - 2}{16}$$

$$= \frac{4 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{4\ X\ (1 + \sqrt{5}\,)}{16} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 36° = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\tan 36° = \frac{\sin 36°}{\cos 36°} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

وحيث أنّ:

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$
$$cos(90° - \theta) = \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$
$$tan(90° - \theta) = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$54° = 90° - 36°$$

فيكون:

$$sin\, 54° = \cos 36° = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$
$$cos\, 54° = \sin 36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$
$$tan\ 54° = \cot 36° = \frac{\cos 36°}{\sin 36°} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

نحسب قِيَمَ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية: 3 °؛ باستخدام متطابقات المجموع والفرق؛ كما يلي:

$$sin(x-y) = sin(x).cos(y) - cos(x).sin(y)$$
$$cos(x-y) = cos(x).cos(y) + sin(x).sin(y)$$
$$tan(x-y) = \frac{tan\,x - tan\,y}{1 + tan\,x\,tan\,y}$$

لدينا:

$$3° = 18° - 15°$$

$$\sin(x-y) = \sin(x).\cos(y) - \cos(x).\sin(y)$$

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) =$$

$$= \sin 18° . \cos 15° - \cos 18° . \sin 15°$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} X \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$- \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} X \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1) X (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4 X 4}$$

$$- \frac{(\sqrt{10+2\sqrt{5}}) X (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4 X 4} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} - \frac{(\sqrt{10+2\sqrt{5}})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - (\sqrt{10+2\sqrt{5}})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{2X5+2\sqrt{5}})(\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2})}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{2(5+\sqrt{5})})\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - \sqrt{2}\sqrt{2}(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}-1)}{16}$$

فيكون لدينا:

$$\sin 3° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$cos(x-y) = cos(x).cos(y)+sin(x).sin(y)$$

$$\cos 3° = \cos(18° - 15°) =$$

$$= \cos 18°.\cos 15° + \sin 18°.\sin 15°$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} X \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} X \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2X5+2\sqrt{5}}}{4} X \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} X \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} X \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} X \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\,X\,4} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{4\,X\,4} =$$

$$= \frac{2\,(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})}{16} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16} =$$

$$= \frac{2\,(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right) + \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16} =$$

$$\cos 3° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2\,(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}{16}$$

$$tan\ 3° = \frac{\sin 3°}{\cos 3°}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\,(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}-1)}{16}}{\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2\,(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\,(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2\,(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - \sqrt{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + \sqrt{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)]}{\sqrt{2}[(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)]}$$

$$tan\ 3° = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}$$

فتكون قِيَمُ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية **3 °** :

$$\sin 3° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$\cos 3° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}{16}$$

$$tan\ 3° = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}$$

نحسب قِيَمَ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية: **10 °**؛ باستخدام متطابقات ثلاثية الزاوية؛ وكما يأتي:

$$x = 10°$$
$$3x = 30°$$
$$sin\ 3x = \sin(30°) = \frac{1}{2}$$
$$sin\ 3x = 3\sin x - 4\,sin^3 x = \frac{1}{2}$$

ليكن:

$$u = sin\ x$$

فنحصل على:

$$3\sin x - 4\,sin^3 x = \frac{1}{2}$$

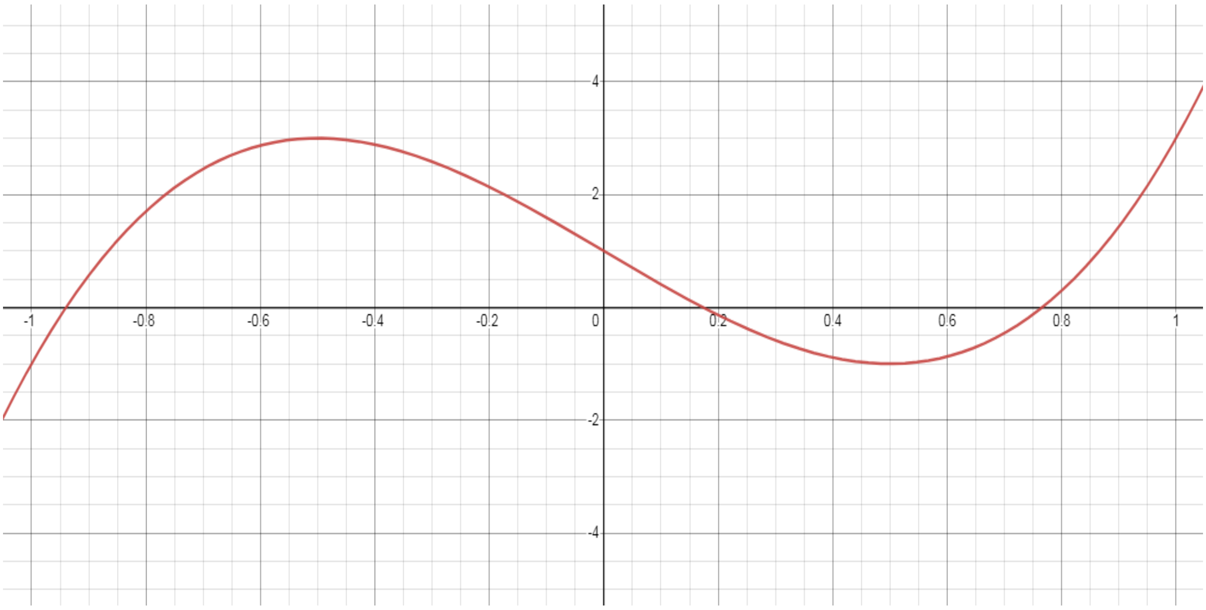
$$3u - 4u^3 = \frac{1}{2}$$

{لو قمنا بتحويل هذه المعادلة إلى دالة وقمنا برسمها؛ لحصلنا على التالي:

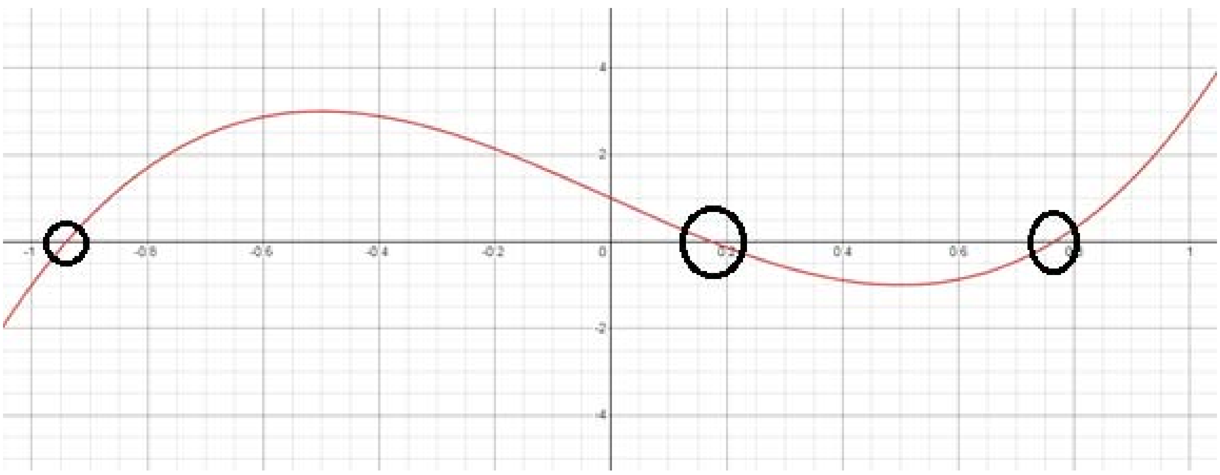
بالضرب في ٢ وإعادة الترتيب:

$$6u - 8u^3 = 1$$
$$8u^3 - 6u + 1 = 0$$
$$f(x) = 8u^3 - 6u + 1$$

وبالرسم:



وكما نلاحظ؛ وجود ثلاثة جذور حقيقية لهذه الدالة:



وهذه الجذور ستعطي قيم الجيوب للزوايا: ١٠، ٥٠ و٧٠ ° }

$$3u - 4u^3 = \frac{1}{2}$$

نعيد ترتيب هذه المعادلة؛ لنحصل على:

$$-\frac{3}{4}u + u^3 = -\frac{1}{8}$$

$$u^3 - \frac{3}{4}u = -\frac{1}{8}$$

سنستخدم طريقة كاردانو لحل هذه المعادلة؛

صيغة كاردانو؛ Cardano's cubic formula؛

$$u^3 + pu = q$$

ليكن:

$$Q = \frac{1}{3}p \quad , \qquad R = \frac{1}{2}q$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

فتكون جذور المعادلة:

$$u_1 = S + T$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}(S + T) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(S - T)$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(S - T)$$

في معادلتنا:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = -\frac{1}{8}$$

لدينا:

$$p = -\frac{3}{4} \rightarrow Q = \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}X - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$q = -\frac{1}{8} \rightarrow R = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{(-\frac{1}{4})^3 + (-\frac{1}{16})^2}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{-\frac{1}{64} + \frac{1}{256}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{-\frac{4}{256} + \frac{1}{256}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{-\frac{3}{256}}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{-3}}{16}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{8}X\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}X\sqrt{-1}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$T = \sqrt[3]{R-\sqrt{Q^3+R^2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$T = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

فتكون جذور المعادلة:

الجذر الأول:

$$u_1 = S+T = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$u_1 = S+T = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}$$

$$u_1 = S+T = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}\right)$$

وهـــــــــي معادلة بأبســــــط صــــورة لها، وليس لها تبســـــيط؛ {ولو أردنا إيجاد قيمة الجذر التكعيبي للجزء الأول من المعادلة؛ فسيكون لدينا ثلاثة قيم لكل من جزئي المعادلة:

فعلى سبيل المثال:

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}$$

لدينا:

$$-1+\sqrt{3}i=x+yi=re^{i\theta}=r(\cos\theta+isin\theta)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{-1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}$$

$$r=2$$

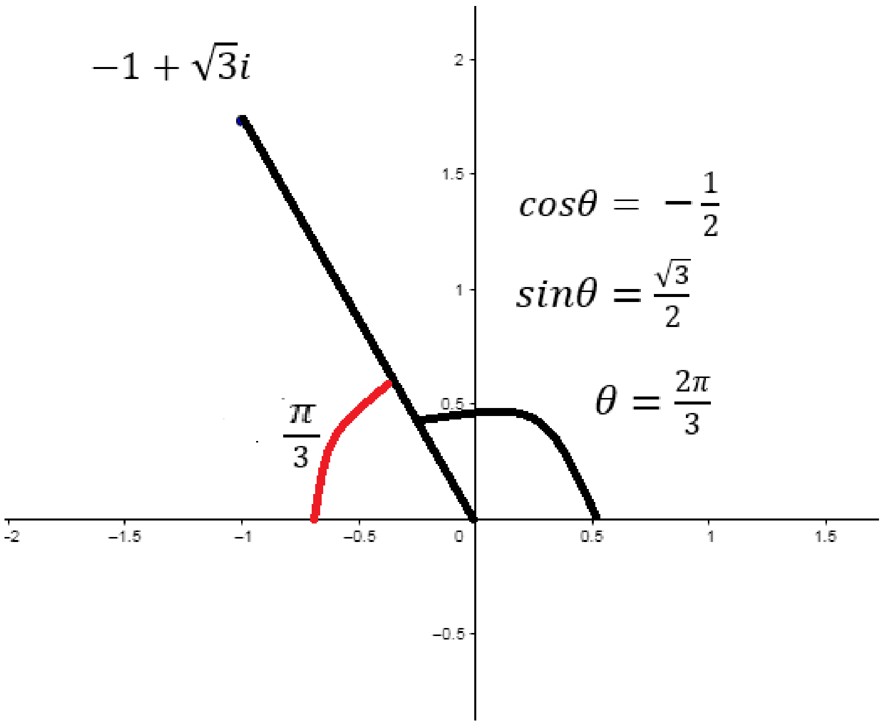
إذن:

$$-1+\sqrt{3}i=r(\cos\theta+isin\theta)=2(\cos\theta+isin\theta)$$

$$-1+\sqrt{3}i=2\cos\theta+2isin\theta$$

$$-1=2\cos\theta \qquad , \quad \sqrt{3}=2isin\theta$$

وبالرسم؛ يظهر لنا:



$$cos\theta=-\frac{1}{2} \qquad , \ sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \ \rightarrow \ \theta=\frac{2\pi}{3}$$

إذن:

$$-1+\sqrt{3}i = r(\cos\theta + isin\theta) = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$$

لدينا:

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + \ isin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \ ,n=3$$

حيث أنّ؛ k=0,1,2, ..., n-1 ؛ إذن:

$$\frac{\theta}{n} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{n} = \frac{2\pi}{3}\ X\frac{1}{3} = \ \frac{2\pi}{9}$$

$$Z_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right) + \ isin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right] \ ,k=0,1,2$$

أي أنّ:

$$Z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \ isin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right]$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right) + \ isin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)\right] \ ,\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + \ isin\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right]$$

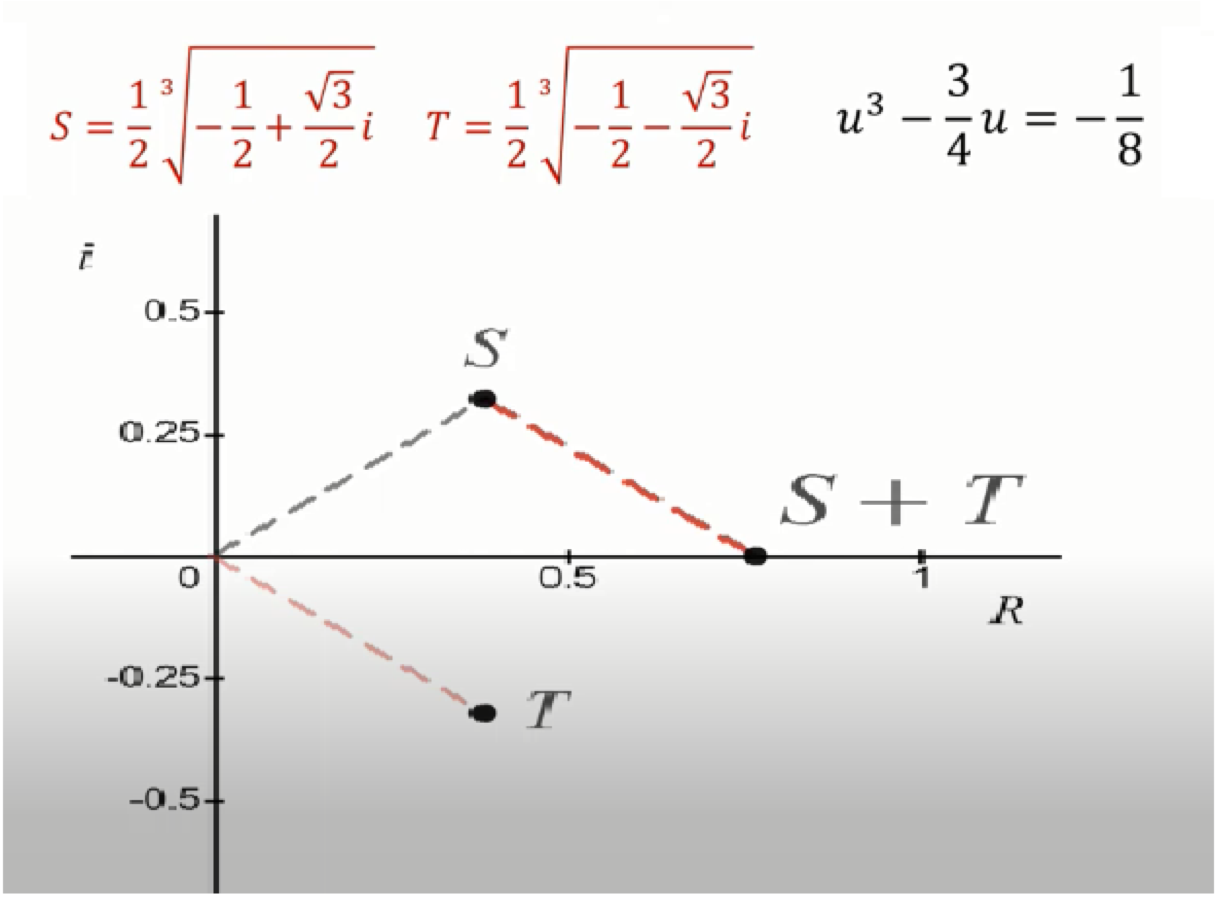
$$Z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right) + \ isin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)\right] \ ,\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + \ isin\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right]$$

{

وعلى الرغم من أنّ هذه المعادلة تبدو للناظر إليها على أنّها تتضمن أعداداً مركبة وجذورها المكعبة ستكون أيضاً أعدادًا مركبة {يتضمن كل جزءٍ منها أجزاءاً حقيقية وأجزاءًا تخيلية} إلّا أنّ المحصلة لها ستكون أعدادًا حقيقية لأنّ الأجزاء

التخيلية ستلغي بعضها البعض الآخر عند جمعها على خطوط المحاور الحقيقية والخيالية:



ونستطيع الحصول على التقريب العشري لجذر المعادلة باستخـــــــــدام طـريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson ووفق الخطوات التالية:

المعادلة:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = -\frac{1}{8}$$

$$u^3 - \frac{3}{4}u + \frac{1}{8} = 0$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

نشتق هذه المعادلة:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}$$

فيكون لدينا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{x_n^3 - \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{8}}{3x_n^2 - \frac{3}{4}}$$

ومن المعلوم أنّ:

$$-1 \leq x \leq 1$$

فنختار قيمة أولية:

$$x_0 = 1$$

ونحلّ المعادلة لنحصل على:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - \frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{8}}{3x_0^2 - \frac{3}{4}} = 1 - \frac{1^3 - \frac{3}{4}X1 + \frac{1}{8}}{3X1^2 - \frac{3}{4}}$$

فنحصل على:

X0 = 1
X1 = 0.8333333333333334
X2 = 0.7743055555555555
X3 = 0.7661950809326901
X4 = 0.7660444946986121
X5 = 0.7660444431189840
X6 = 0.7660444431189780
X7 = 0.7660444431189780
X8 = 0.7660444431189780
X9 = 0.7660444431189780

وبما أنّ القيمة لم تعد تتغير، فبذلك نكون قد حصلنا على التقريب المطلوب للمعادلة.

$$X = 0.7660444431189780$$

فتكون القيمة الدقيقة للجذر الأول؛ هي:

$$u_1 = S + T = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

أو:

$$u_1 = S + T = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{3}i} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{3}i}\right)$$

والتقريب العشري لها:

$$u_1 = 0.7660444 \approx \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \approx \cos(40^\circ) \approx \sin(50^\circ)$$

وهذا يعني أنّ القيمة: $u = 0.7660444$ ؛ هي أحد جذور المعادلة:

$$8u^3 - 6u + 1 = 0$$

الجذر الثاني:

$$u_2 = -\frac{1}{2}(S + T) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(S - T)$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{4}i\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

وهي معادلة بابسط صورة لها، وليس لها تبسيط؛ ونستطيع إدخال هذه المعادلة إلى الموقع:

https://www.wolframalpha.com

فنحصل على التقريب العشري لها:

-0.93969262078590838405410927732473 ....

$$-0.9396926 \approx -\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx -\cos(20°) \approx -\sin(70°)$$

$$0.9396926 \approx \sin(70°)$$

ونستطيع الحصول على التقريب العشري لجذر المعادلة باستخدام طـريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson ووفق الخطوات التي تم اتباعها في الحصول على التقريب العشري لجذر المعادلة الأول؛ فنختار قيمة أولية:

$$x_0 = -1$$

ونحلّ المعادلة لنحصل على:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - \frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{8}}{3x_0^2 - \frac{3}{4}} = 1 - \frac{(-1)^3 - \frac{3}{4}X(-1) + \frac{1}{8}}{3X(-1)^2 - \frac{3}{4}}$$

فنحصل على:

X0 = -1
X1 = -0.9444444444444444
X2 = -0.9397257834757835
X3 = -0.9396926224183356
X4 = -0.9396926207859083
X5 = -0.9396926207859084
X6 = -0.9396926207859084
X7 = -0.9396926207859084

وبما أنّ القيمة لم تعد تتغير، فبذلك نكون قد حصلنا على التقريب المطلوب للمعادلة.

X = -0.9396926207859084

وهـــــذا يعني أنّ القيمة: $u = -0.9396926$ ؛ هي أحد جذور المعادلة:

$$8u^3 - 6u + 1 = 0$$

الجذر الثالث:

$$u_3=-\frac{1}{2}(S+T)-\frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$u_3=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$$

$$u_3=-\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{4}i\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$$

$$u_3=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$u_3=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{4}i\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$u_3=\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

وهي معادلة بأبسط صورة لها، وليس لها تبسيط؛ ونستطيع إدخال هذه المعادلة إلى الموقع:

https://www.wolframalpha.com

فنحصل على التقريب العشري لها:

*0.173648177666930348851716626769314796000375677184069387236241378*1

$$0.17364817 \approx \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx \sin(10°) \approx \cos(80°)$$

$$0.17364817 \approx \sin(10°)$$

ونستطيع الحصول على التقريب العشري لجذر المعادلة باستخدام طـريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson ووفق الخطوات التي تم اتباعها في الحصول على التقريب العشري لجذر المعادلة الأول؛ فنختار قيمة أولية:

$$x_0 = 0$$

ونحلّ المعادلة لنحصل على:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - \frac{3}{4}x_0 + \frac{1}{8}}{3x_0^2 - \frac{3}{4}} = 0 - \frac{0^3 - \frac{3}{4}X0 + \frac{1}{8}}{3X0^2 - \frac{3}{4}}$$

فنحصل على:

$X0 = 0$
$X1 = 0.1666666666666667$
$X2 = 0.1736111111111111$
$X3 = 0.1736481765819340$
$X4 = 0.1736481776669303$
$X5 = 0.1736481776669303$
$X6 = 0.1736481776669303$

وبما أنّ القيمة لم تعد تتغير، فبذلك نكون قد حصلنا على التقريب المطلوب للمعادلة.

وهذا يعني أنّ القيمة: $u = 0.17364817$ ؛ هي أحد جذور المعادلة:

$$8u^3 - 6u + 1 = 0$$

فتكون جذور المعادلة:

$$8u^3 - 6u + 1 = 0$$

الجذر الأول:

$$u_1 = S + T = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}\right)$$

$$\boldsymbol{u = 0.7660444431189780 \approx \cos(40^\circ) \approx \sin(50^\circ)}$$

الجذر الثاني:

$$u_2 = -\frac{1}{2}(S+T) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$u = -0.9396926 \approx -\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx -\cos(20^\circ) \approx -\sin(70^\circ)$$

$$\boldsymbol{u = 0.9396926207859084 \approx \cos(20^\circ) \approx \sin(70^\circ)}$$

الجذر الثالث:

$$u_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$u_3 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\boldsymbol{0.17364817 \approx \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx \cos(80^\circ) \approx \sin(10^\circ)}$$

نحسب قِيَمَ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية: $1°$؛ باستخدام متطابقات ثلاثية الزاوية؛ وكما يأتي:

$$x = 1°$$
$$3x = 3°$$
$$\sin 3x = \sin(3°) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{16}$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x =$$
$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{16}$$

ليكن:

$$u = \sin x \quad , \quad u^3 = \sin^3 x$$

فنحصل على:

$$3\sin x - 4\sin^3 x = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{16}$$
$$3u - 4u^3 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{16}$$

بالضرب في -١ وإعادة الترتيب:

$$4u^3 - 3u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{16}$$

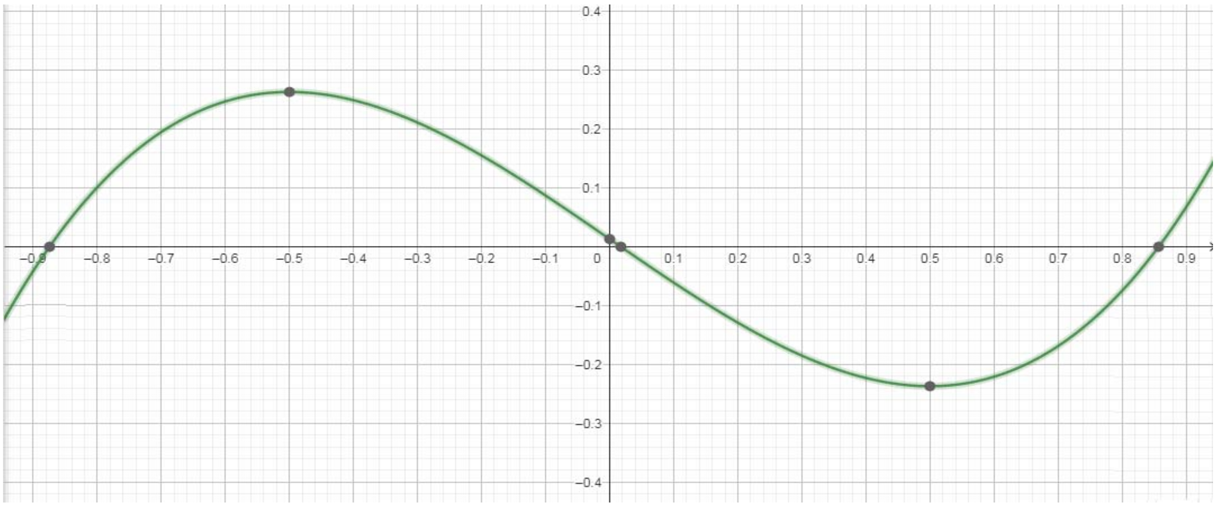
بالقسمة على ٤:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

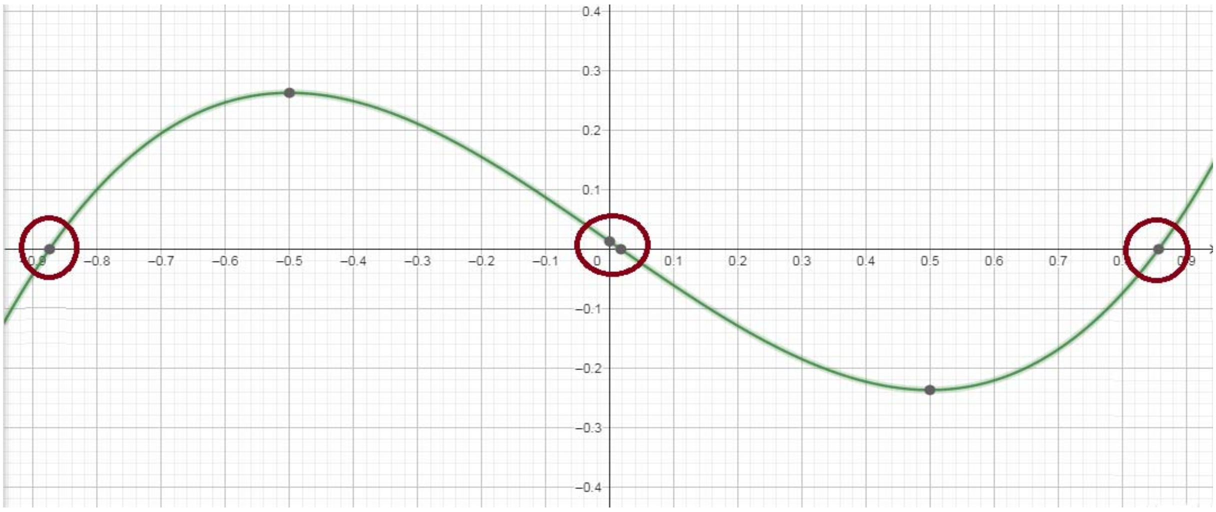
{لو قمنا بتحويل هذه المعادلة إلى دالة وقمنا برسمها؛ لحصلنا على التالي:

$$f(u) = u^3 - \frac{3}{4}u - \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

وبالرسم:



نلاحظ؛ وجود ثلاثة جذور حقيقية لهذه الدالة:



وهذه الجذور ستعطي قيم الجيوب للزوايا: ١، ٥٩ و٦١ °.

سنستخدم طريقة كاردانو لحل هذه المعادلة؛

$$u^3 - \frac{3}{4}u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

صيغة كاردانو؛ Cardano's cubic formula؛

$$u^3 + pu = q$$

ليكن:

$$Q = \frac{1}{3}p \quad , \qquad R = \frac{1}{2}q$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

فتكون جذور المعادلة:

$$u_1 = S + T$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}(S + T) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(S - T)$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(S - T)$$

في معادلتنا:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{64}$$

لدينا:

$$p = -\frac{3}{4} \rightarrow Q = \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}X - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$q = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{64}$$

$$\rightarrow R = \frac{1}{2}q$$

$$= \frac{1}{2}X\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{64}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{128}$$

$$Q^3+R^2=\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{64}+\frac{\left(2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\right)^2}{128^2}$$

$$=-\frac{256}{128^2}+\frac{\left(2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\right)^2}{128^2}$$

$$=\frac{-256+\left(2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\right)^2}{128^2}$$

$$=\frac{-256+128-16\sqrt{3}-16\sqrt{3}\sqrt{5}+8\left(\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right)-8\left(\sqrt{10(5+\sqrt{5})}\right)}{16384}$$

$$=\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}$$

$$S=\sqrt[3]{R+\sqrt{Q^3+R^2}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

$$T=\sqrt[3]{R-\sqrt{Q^3+R^2}}\ =$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

فتكون جذور المعادلة:

الجذر الأول:

$$u_1 = S + T =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

ونستطيع إدخال هذه المعادلة إلى الموقع:

https://www.wolframalpha.com

فنحصل على التقريب العشري لها:

0.857167300702112287465217980144763314384
0536648060706357440056457

ونستطيع الحصول على التقريب العشري لجذر المعادلة باستخدام طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson ووفق الخطوات التالية:

المعادلة:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

$$u^3 - \frac{3}{4}u - \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64} = 0$$

$$f(x) = u^3 - \frac{3}{4}u - \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

نشتق هذه المعادلة:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}$$

فيكون لدينا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{x_n^3 - \frac{3}{4}x_n - \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}}{3x_n^2 - \frac{3}{4}}$$

ومن المعلوم أنّ:

$$-1 \leq x \leq 1$$

فنختار قيمة أولية:

$$x_0 = 1$$

ونحلّ المعادلة لنحصل على:

$X0 = 1$
$X1 = 0.88307378263967284404$
$X2 = 0.85827499078472457850$
$X3 = 0.85716946377882119457$
$X4 = 0.85716730071038593763$
$X5 = 0.85716730070211233361$
$X6 = 0.85716730070211222259$
$X7 = 0.85716730070211222259$
$X8 = 0.85716730070211222259$

وبما أنّ القيمة لم تعد تتغير، فنكون قد حصلنا على التقريب المطلوب للمعادلة.

$$X = 0.85716730070211222259$$

فتكون القيمة الدقيقة للجذر الأول؛ هي:

$$u_1 = S + T =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} + \sqrt{\frac{-16 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} - \sqrt{\frac{-16 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

والتقريب العشري لها:

$$0.8571673 \approx \cos(31°) = \sin(59°)$$

والقيمة: $u = 0.8571673$ ؛ هي أحد جذور المعادلة:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

$$64\,u^3 - 48u = 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)$$

الجذر الثاني:

$$u_2 = -\frac{1}{2}(S+T) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} + \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right. \\ &\left. + \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} - \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right) \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} + \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right. \\ &\left. - \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} - \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right) \end{aligned}$$

ونستطيع إدخال هذه المعادلة إلى الموقع:

https://www.wolframalpha.com

فنحصل على التقريب العشري لها:

-0.87461970713939580028463695866107 .....

ونستطيع الحصـــــــــــول على التقريب العشـــــري لجـــــذر المعادلة باستخدام طـريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson ووفق الخطوات التالية:

لدينا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{x_n^3 - \frac{3}{4}x_n - \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}}{3x_n^2 - \frac{3}{4}}$$

فنختار قيمة أولية:

$$x_0 = -1$$

ونحلّ المعادلة لنحصل على:

X0 = -1
X1 = -0.89470399513810483505
X2 = -0.87527040112789911142
X3 = -0.87462042502590042758
X4 = -0.87461970714027115203
X5 = -0.87461970713939574118
X6 = -0.87461970713939574118
X7 = -0.87461970713939574118

وبما أنّ القيمة لم تعـــــد تتغير، فنكون قد حصلنا على التقريب المطلوب للمعادلة.

X = -0.87461970713939574118

فتكون القيمة الدقيقة للجذر الثاني؛ هي:

$$u_2 = -\frac{1}{2}(S+T) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$
$$\left.-\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

والتقريب العشري لها:

$$-0.8746197 \approx \cos(151°) = -\cos(29°) = -\sin(61°)$$
$$0.8746197 \approx \cos(29°) = \sin(61°)$$

والقيمة:

$$u = -0.8746197$$

هي أحد جذور المعادلة:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

أو:

$$64\,u^3 - 48u = 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)$$

الجذر الثالث:

$$u_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$
$$\left.-\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

ونستطيع إدخال هذه المعادلة إلى الموقع:

https://www.wolframalpha.com

فنحصل على التقريب العشري لها:

0.017452406437283512819418978516311......

ونستطيع الحصـــول على التقريب العشـــري لجـــذر المعادلة باستخدام طـريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson ووفق الخطوات التالية:

لدينا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{x_n^3 - \frac{3}{4}x_n - \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}}{3x_n^2 - \frac{3}{4}}$$

فنختار قيمة أولية:

$$x_0 = 0$$

ونحلّ المعادلة لنحصل على:

X0 = 0
X1 = 0.01744531874764796917
X2 = 0.01745240643377330564

$X3 = 0.017452406437283535 94$

$X4 = 0.017452406437283535 94$

$X5 = 0.017452406437283535 94$

وبما أنّ القيمة لم تعد تتغير، فنكون قد حصلنا على التقريب المطلوب للمعادلة.

$$X = 0.01745240643728353594$$

فتكون القيمة الدقيقة للجذر الثالث؛ هي:

$$u_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$
$$\left.-\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

والتقريب العشري لها:

$$0.0174524 \approx \cos(89^\circ) = \sin(1^\circ)$$

والقيمة: $u = 0.0174524$؛ هي أحد جذور المعادلة:

$$u^3 - \frac{3}{4}u = \frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{64}$$

$$64\,u^3 - 48u = 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)$$

فتكون جذور المعادلة:

$$64\,u^3 - 48u = 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)$$

الجذر الأول:

$$u_1 = S + T =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} + \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} - \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

$$\boldsymbol{u = 0.8571673007021122 \approx \cos(31^\circ) \approx \sin(59^\circ)}$$

الجذر الثاني:

$$u_2 = -\frac{1}{2}(S+T) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} + \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} - \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} + \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$

$$\left. - \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-\ 1) - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128} - \sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

$$u = -0.8746197 \approx \cos(151^\circ) = -\cos(29^\circ)$$
$$= -\sin(61^\circ)$$

$$\boldsymbol{u = 0.8746197071393957 \approx \cos(29^\circ) \approx \sin(61^\circ)}$$

الجذر الثالث:

$$u_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(S-T)$$

$$\begin{aligned} u_3 = & -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right. \\ & \left.+\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right) \\ & -\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right. \\ & \left.-\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{0.0174524064372835 \approx \boldsymbol{sin}(1^\circ) \approx \boldsymbol{cos}(89^\circ)}$$

قِيَمُ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لزوايا أخرى مشتقة من الزوايا الرئيسية

$$\sin 3° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$\cos 3° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}{16}$$

$$\tan 3° = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - \sqrt{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}$$

°	sin	cos	tan
° 15	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
° 18	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
° 36	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$
° 54	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
° 72	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
° 75	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$

$$\sin 1° = \cos 89° =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$

$$\left.-\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

$$\approx 0.0174524064372835$$

$$\sin 10° = \cos 80° =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\approx 0.17364817$$

$$\sin 40° = \cos 50° = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}\right)$$

$$\approx 0.7660444431189780$$

$$\sin 59° = \cos 31° =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

$$+\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}$$

$$\approx 0.8571673007021122$$

$$\sin 61^\circ = \cos 29^\circ =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}+\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right.$$

$$\left.-\sqrt[3]{\frac{2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}{128}-\sqrt{\frac{-16-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{2048}}}\right)$$

$$\approx 0.8746197071393957$$

$$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\approx 0.9396926207859084$$

حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لجميع الزوايا من مضاعفات ٣°.

قيم الدوال المثلثية لجميع الزوايا من مضاعفات العدد ٣ دقيقةٌ؛ وتُحسَبُ هذه النسب المثلثية باستخدام متطابقات المجموع، ومتطابقات ضعف الزاوية، ومتطابقات ثلاثية الزاوية، وصيغ الزوايا المتعددة:

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1) - 2\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)}{16}$$

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^3 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1\\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x
\end{aligned}$$

أي أنّ:

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\
\cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x\\
\cos 4x &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1
\end{aligned}$$

حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ لجميع الزوايا باستخدام قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ للزاوية بقيمة ١°.

يمكن حساب قيم الدوال المثلثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق، ومتطابقات ضعف الزاوية، ومتطابقات ثلاثية الزاوية، وصيغ الزوايا المتعددة.

حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ باستخدام طريقة المتسلسلات.

الدوال المثلثية هـــي دوال تحليلية؛ ويمكـــن تمثيلها بواسطة متسلسلات لانهائية.

باستخدام متسلسلة تايلور، يمكن كتابة كل دالة مستمرة على شكل متسلسلة قوة بجوار النقطة a على النحو التالي:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

حيث تشير $n!$ إلى مضروب العدد:

$$n! = n\ X\ (n-1)\ X\ (n-2)\ X \ldots X\ 1$$
$$0! = 1$$

عندما يكون $a = 0$ ، تتحول هذه المتسلسلة إلى متسلسلة ماكلورين:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

متسلسلتا ماكلورين لدالتي الجيب والجيب تمام:

الزاوية x مقاسة بالتقدير الدائري.

جيب الزاوية:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

جيب تمام الزاوية:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\theta_{rad} = \theta_{degree}\, X \frac{\pi}{180}$$

فيكون:

$$\theta_{rad(1^\circ)} = 1^\circ\, X \frac{\pi}{180} = 0.017453292519943295 76$$

جيب الزاوية:

$$\sin 1^\circ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\sin 1^\circ &= 0.01745329251994329576 \\ &\quad - \frac{0.01745329251994329576^3}{3!} \\ &\quad + \frac{0.01745329251994329576^5}{5!} \\ &\quad - \frac{0.01745329251994329576^7}{7!} + \cdots \\ &= 0.017452406437284\end{aligned}$$

جيب تمام الزاوية:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}cos\, 1^\circ &= 1 - \frac{0.01745329251994329576^2}{2!} \\ &\quad + \frac{0.01745329251994329576^4}{4!} \\ &\quad - \frac{0.01745329251994329576^6}{6!} + \cdots \\ &= 0.99984769515639\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة يمكننا الحصول على الجدول التالي:

θ °	θ *rad*	sin θ	cos θ
0	0	0	1
0.1	0.001745329252	0.0017453283659	0.9999984769133
0.5	0.00872664626	0.0087265354984	0.9999619230642
1	0.0174532925199	0.0174524064373	0.9998476951564
2	0.0349065850399	0.0348994967025	0.9993908270191
3	0.0523598775598	0.0523359562429	0.9986295347546
4	0.0698131700798	0.0697564737441	0.9975640502598
5	0.0872664625997	0.0871557427477	0.9961946980917
6	0.1047197551197	0.1045284632677	0.9945218953683
7	0.1221730476396	0.1218693434051	0.9925461516413
8	0.1396263401595	0.1391731009601	0.9902680687416
9	0.1570796326795	0.1564344650402	0.9876883405951
10	0.1745329251994	0.1736481776669	0.9848077530122
11	0.1919862177194	0.1908089953765	0.9816271834477
12	0.2094395102393	0.2079116908178	0.9781476007338
13	0.2268928027593	0.2249510543439	0.9743700647852
14	0.2443460952792	0.2419218955997	0.970295726276
15	0.2617993877991	0.2588190451025	0.9659258262891
16	0.2792526803191	0.275637355817	0.9612616959383
17	0.296705972839	0.2923717047228	0.956304755963
18	0.314159265359	0.309016994375	0.9510565162952
19	0.3316125578789	0.3255681544573	0.9455185755993
20	0.3490658503989	0.3420201433259	0.9396926207859
21	0.3665191429188	0.3583679495457	0.9335804264972
22	0.3839724354388	0.3746065934166	0.9271838545668
23	0.4014257279587	0.3907311284904	0.9205048534524
24	0.4188790204786	0.4067366430775	0.9135454576425
25	0.4363323129986	0.4226182617434	0.9063077870366
26	0.4537856055185	0.4383711467933	0.898794046299
27	0.4712388980385	0.4539904997459	0.8910065241881
28	0.4886921905584	0.4694715627954	0.8829475928585

29	0.5061454830784	0.4848096202603	0.8746197071388
30	0.5235987755983	0.5000000000203	0.8660254037836
31	0.5410520681182	0.5150380749391	0.8571673007008
32	0.5585053606382	0.5299192642744	0.8480480961545
33	0.5759586531581	0.5446390350729	0.8386705679426
34	0.5934119456781	0.5591929035511	0.8290375725511
35	0.610865238198	0.5735764364615	0.8191520442834
36	0.628318530718	0.587785252443	0.8090169943671
37	0.6457718232379	0.6018150233555	0.7986355100363
38	0.6632251157578	0.6156614755985	0.7880107535916
39	0.6806784082778	0.6293203914128	0.7771459614364
40	0.6981317007977	0.6427876101661	0.7660444430911
41	0.7155849933177	0.6560590296196	0.7547095801852
42	0.7330382858376	0.6691306071787	0.7431448254273
43	0.7504915783576	0.6819983611244	0.7313537015527
44	0.7679448708775	0.6946583718262	0.7193398002511
45	0.7853981633974	0.7071067829369	0.7071067810719
46	0.8028514559174	0.7193398025673	0.6946583703098
47	0.8203047484373	0.7313537044421	0.6819983598694
48	0.8377580409573	0.7431448290353	0.6691306061103
49	0.8552113334772	0.7547095846857	0.6560590286722
50	0.8726646259972	0.7660444486914	0.642787609281
51	0.8901179185171	0.7771459683843	0.6293203905356
52	0.9075712110371	0.7880107621819	0.6156614746766
53	0.925024503557	0.7986355206191	0.6018150223365
54	0.9424777960769	0.8090170073574	0.587785251272
55	0.9599310885969	0.8191520601717	0.5735764350795
56	0.9773843811168	0.8290375919152	0.5591929018925
57	0.9948376736368	0.8386705914617	0.5446390330637
58	1.0122909661567	0.8480481246243	0.5299192618295
59	1.0297442586767	0.8571673350516	0.5150380719596
60	1.0471975511966	0.8660254450998	0.4999999963909
61	1.0646508437165	0.8746197566814	0.4848096158464
62	1.0821041362365	0.8829476520901	0.469471557439

63	1.0995574287564	0.8910065948009	0.4539904932622
64	1.1170107212764	0.8987941302468	0.438371138966
65	1.1344640137963	0.9063078865695	0.4226182523199
66	1.1519173063163	0.9135455753469	0.4067366317633
67	1.1693705988362	0.920504992294	0.3907311149426
68	1.1868238913561	0.9271840179399	0.3746065772372
69	1.2042771838761	0.9335806182788	0.3583679302733
70	1.221730476396	0.9396928453954	0.3420201204268
71	1.239183768916	0.9455188380649	0.3255681273156
72	1.2566370614359	0.9510568223275	0.3090169622811
73	1.2740903539559	0.956305112036	0.292371666861
74	1.2915436464758	0.9612621093783	0.2756373112513
75	1.3089969389958	0.9659263053731	0.2588189927608
76	1.3264502315157	0.9702962803401	0.2419218342565
77	1.3439035240356	0.9743707043425	0.2249509826005
78	1.3613568165556	0.9781483376047	0.207911607081
79	1.3788101090755	0.9816280309022	0.1908088978344
80	1.3962634015955	0.9848087259257	0.173648064262
81	1.4137166941154	0.9876894556182	0.1564343334402
82	1.4311699866354	0.990269344486	0.1391729485252
83	1.4486232791553	0.992547608882	0.1218691671524
84	1.4660765716752	0.9945235572638	0.1045282598308
85	1.4835298641952	0.9961965904241	0.0871555083339
86	1.5009831567151	0.9975662016946	0.0697562040857
87	1.5184364492351	0.9986319771239	0.0523356465448
88	1.535889741755	0.999393595628	0.034899141584
89	1.553343034275	0.9998508291154	0.017451999869
90	1.5707963267949	1.0000035425843	0.0000247372764

حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ باستخدام طريقة الكسور المستمرة المعممة:

الكسر المستمر المعمم هو تعميم للكسور المستمرة الاعتيادية حيث تأخذ مقاماته وبسوطه قِيَمًا حقيقية أو عقدية ما، ويمكننا كتابة الدوال الرياضية على هذا النحو:

فيما يلي الكسور المستمرة لبعض الدوال:

الزاوية x مقاسة بالتقدير الدائري.

جيب الزاوية:

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{2\ X\ 3 - x^2 + \cfrac{2\ X\ 3\ x^2}{4\ X\ 5 - x^2 + \cfrac{4\ X\ 5\ x^2}{6\ X\ 7 - x^2 + \cdots}}}}$$

جيب تمام الزاوية:

$$\cos x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{2 - x^2 + \cfrac{2\ x^2}{3\ X\ 4 - x^2 + \cfrac{3\ X\ 4\ x^2}{5\ X\ 6 - x^2 + \cdots}}}}$$

ظل الزاوية:

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cdots}}}}$$

ظل تمام الزاوية:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \cfrac{x}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cdots}}}}$$

على سبيل المثال:

$$\theta = 1^\circ \rightarrow \theta_{rad} = 0.01745329251994329576$$

فيكون:

جيب الزاوية:

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{2\,X\,3 - x^2 + \cfrac{2\,X\,3\,x^2}{4\,X\,5 - x^2 + \cfrac{4\,X\,5\,x^2}{6\,X\,7 - x^2 + \cdots}}}}$$

$$\sin 1^\circ = \cfrac{0.01745329251994329576}{1 + \cfrac{0.01745329251994329576^2}{2\,X\,3 - x^2 + \cfrac{2\,X\,3\;0.01745329251994329576^2}{4\,X\,5 - x^2 + \cfrac{4\,X\,5\;0.01745329251994329576^2}{6\,X\,7 - 0.01745329251994329576^2 + \cdots}}}}$$

$$\sin 1^\circ = 0.017452406437284$$

جيب تمام الزاوية:

$$\cos x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{2 - x^2 + \cfrac{2\,x^2}{3\,X\,4 - x^2 + \cfrac{3\,X\,4\,x^2}{5\,X\,6 - x^2 + \cdots}}}}$$

$$\cos x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{0.01745329251994329576^2}{2 - 0.01745329251994329576^2 + \cfrac{2\,X\,0.01745329251994329576^2}{3\,X\,4 - 0.01745329251994329576^2 + \cfrac{3\,X\,4\;0.01745329251994329576^2}{5\,X\,6 - 0.01745329251994329576^2 + \cdots}}}}$$

$$cos\,1^\circ = 0.99984769515639$$

ظل الزاوية:

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cdots}}}}$$

$$\tan 1^\circ = \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.017453292519943295 76} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{0.01745329251994329576} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{0.01745329251994329576} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{0.01745329251994329576} - \cdots}}}}$$

$$\tan 1^\circ \ = 0.017455064928218$$

ظل تمام الزاوية:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \cfrac{x}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cdots}}}}$$

$$\cot 1^\circ = \frac{1}{0.01745329251994329576} - \cfrac{0.01745329251994329576}{3 - \cfrac{0.01745329251994329576^2}{5 - \cfrac{0.01745329251994329576^2}{7 - \cfrac{0.01745329251994329576^2}{9 - \cdots}}}}$$

$$cot\ 1^\circ \ = 57.289961630759$$

حِسَابُ قِيَمِ الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ باستخدام الجداول المثلثية.

قيم الدوال المثلثية للزاويا بين ٠° و ٩٠°:

°	جا	جتا	ظا	قتا	قا	ظتا
0	0.0000	1.0000	0.0000	∞	1.0000	∞
1	0.0175	0.9998	0.0175	57.2987	1.0002	57.2900
2	0.0349	0.9994	0.0349	28.6537	1.0006	28.6363
3	0.0523	0.9986	0.0524	19.1073	1.0014	19.0811
4	0.0698	0.9976	0.0699	14.3356	1.0024	14.3007
5	0.0872	0.9962	0.0875	11.4737	1.0038	11.4301
6	0.1045	0.9945	0.1051	9.5668	1.0055	9.5144
7	0.1219	0.9925	0.1228	8.2055	1.0075	8.1443
8	0.1392	0.9903	0.1405	7.1853	1.0098	7.1154
9	0.1564	0.9877	0.1584	6.3925	1.0125	6.3138
10	0.1736	0.9848	0.1763	5.7588	1.0154	5.6713
11	0.1908	0.9816	0.1944	5.2408	1.0187	5.1446
12	0.2079	0.9781	0.2126	4.8097	1.0223	4.7046
13	0.2250	0.9744	0.2309	4.4454	1.0263	4.3315
14	0.2419	0.9703	0.2493	4.1336	1.0306	4.0108
15	0.2588	0.9659	0.2679	3.8637	1.0353	3.7321
16	0.2756	0.9613	0.2867	3.6280	1.0403	3.4874
17	0.2924	0.9563	0.3057	3.4203	1.0457	3.2709
18	0.3090	0.9511	0.3249	3.2361	1.0515	3.0777
19	0.3256	0.9455	0.3443	3.0716	1.0576	2.9042
20	0.3420	0.9397	0.3640	2.9238	1.0642	2.7475
21	0.3584	0.9336	0.3839	2.7904	1.0711	2.6051
22	0.3746	0.9272	0.4040	2.6695	1.0785	2.4751
23	0.3907	0.9205	0.4245	2.5593	1.0864	2.3559

2.2460	1.0946	2.4586	0.4452	0.9135	0.4067	24
2.1445	1.1034	2.3662	0.4663	0.9063	0.4226	25
2.0503	1.1126	2.2812	0.4877	0.8988	0.4384	26
1.9626	1.1223	2.2027	0.5095	0.8910	0.4540	27
1.8807	1.1326	2.1301	0.5317	0.8829	0.4695	28
1.8040	1.1434	2.0627	0.5543	0.8746	0.4848	29
1.7321	1.1547	2.0000	0.5774	0.8660	0.5000	30
1.6643	1.1666	1.9416	0.6009	0.8572	0.5150	31
1.6003	1.1792	1.8871	0.6249	0.8480	0.5299	32
1.5399	1.1924	1.8361	0.6494	0.8387	0.5446	33
1.4826	1.2062	1.7883	0.6745	0.8290	0.5592	34
1.4281	1.2208	1.7434	0.7002	0.8192	0.5736	35
1.3764	1.2361	1.7013	0.7265	0.8090	0.5878	36
1.3270	1.2521	1.6616	0.7536	0.7986	0.6018	37
1.2799	1.2690	1.6243	0.7813	0.7880	0.6157	38
1.2349	1.2868	1.5890	0.8098	0.7771	0.6293	39
1.1918	1.3054	1.5557	0.8391	0.7660	0.6428	40
1.1504	1.3250	1.5243	0.8693	0.7547	0.6561	41
1.1106	1.3456	1.4945	0.9004	0.7431	0.6691	42
1.0724	1.3673	1.4663	0.9325	0.7314	0.6820	43
1.0355	1.3902	1.4396	0.9657	0.7193	0.6947	44
1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	0.7071	45
0.9657	1.4396	1.3902	1.0355	0.6947	0.7193	46
0.9325	1.4663	1.3673	1.0724	0.6820	0.7314	47
0.9004	1.4945	1.3456	1.1106	0.6691	0.7431	48
0.8693	1.5243	1.3250	1.1504	0.6561	0.7547	49
0.8391	1.5557	1.3054	1.1918	0.6428	0.7660	50
0.8098	1.5890	1.2868	1.2349	0.6293	0.7771	51
0.7813	1.6243	1.2690	1.2799	0.6157	0.7880	52

0.7536	1.6616	1.2521	1.3270	0.6018	0.7986	53
0.7265	1.7013	1.2361	1.3764	0.5878	0.8090	54
0.7002	1.7434	1.2208	1.4281	0.5736	0.8192	55
0.6745	1.7883	1.2062	1.4826	0.5592	0.8290	56
0.6494	1.8361	1.1924	1.5399	0.5446	0.8387	57
0.6249	1.8871	1.1792	1.6003	0.5299	0.8480	58
0.6009	1.9416	1.1666	1.6643	0.5150	0.8572	59
0.5774	2.0000	1.1547	1.7321	0.5000	0.8660	60
0.5543	2.0627	1.1434	1.8040	0.4848	0.8746	61
0.5317	2.1301	1.1326	1.8807	0.4695	0.8829	62
0.5095	2.2027	1.1223	1.9626	0.4540	0.8910	63
0.4877	2.2812	1.1126	2.0503	0.4384	0.8988	64
0.4663	2.3662	1.1034	2.1445	0.4226	0.9063	65
0.4452	2.4586	1.0946	2.2460	0.4067	0.9135	66
0.4245	2.5593	1.0864	2.3559	0.3907	0.9205	67
0.4040	2.6695	1.0785	2.4751	0.3746	0.9272	68
0.3839	2.7904	1.0711	2.6051	0.3584	0.9336	69
0.3640	2.9238	1.0642	2.7475	0.3420	0.9397	70
0.3443	3.0716	1.0576	2.9042	0.3256	0.9455	71
0.3249	3.2361	1.0515	3.0777	0.3090	0.9511	72
0.3057	3.4203	1.0457	3.2709	0.2924	0.9563	73
0.2867	3.6280	1.0403	3.4874	0.2756	0.9613	74
0.2679	3.8637	1.0353	3.7321	0.2588	0.9659	75
0.2493	4.1336	1.0306	4.0108	0.2419	0.9703	76
0.2309	4.4454	1.0263	4.3315	0.2250	0.9744	77
0.2126	4.8097	1.0223	4.7046	0.2079	0.9781	78
0.1944	5.2408	1.0187	5.1446	0.1908	0.9816	79
0.1763	5.7588	1.0154	5.6713	0.1736	0.9848	80
0.1584	6.3925	1.0125	6.3138	0.1564	0.9877	81

82	0.9903	0.1392	7.1154	1.0098	7.1853	0.1405
83	0.9925	0.1219	8.1443	1.0075	8.2055	0.1228
84	0.9945	0.1045	9.5144	1.0055	9.5668	0.1051
85	0.9962	0.0872	11.4301	1.0038	11.4737	0.0875
86	0.9976	0.0698	14.3007	1.0024	14.3356	0.0699
87	0.9986	0.0523	19.0811	1.0014	19.1073	0.0524
88	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	0.0349
89	0.9998	0.0175	57.2900	1.0002	57.2987	0.0175
90	1.0000	0.0000	∞	1.0000	∞	0.0000

كما يمكن استخدام قِيَم الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ؛ التي تم حِسَابُها باستخدام طريقة المتسلسلات؛ والمبينة في الجدول الموجود في الصفحة رقم 159 وما بعدها.

كَيْفِيَّةُ إِدْرَاجِ مُعَادَلَاتٍ رِيَاضِيَّةٍ فِي بَرْنَامَجِ مايكروسوفت وورد – Microsoft Word

تحتوي الإصدارات الحديثة من برنامج مايكروسوفت وورد - Microsoft Word على كل الرموز والتراكيب التي يمكن أن يحتاجها أستاذ الرياضيات تقريبًا.

ويمكن كتابة هذه الرموز والتراكيب بسرعة باستخدام الاختصارات أو إيجادها في قائمة المعادلات اعتمادًا على تفضيلاتك.

تختلف العملية قليلًا إن كنت تستخدم نظام ماكنتوش أو إن كنت تستخدم برنامج مايكروسوفت وورد ٢٠٠٣ والإصدارات الأقدم.

لاحظ أنّ طريقة "إدراج عنصر" القديمة التي كانت موجودة في برنامج مايكروسوفت وورد ٢٠٠٣ غير مضمّنة في الإصدارات الحديثة، إلا أنّه من الممكن شراء لاحقة ماث تايب MathType إن كنت تفضّل طريقتها.

ملاحظة:

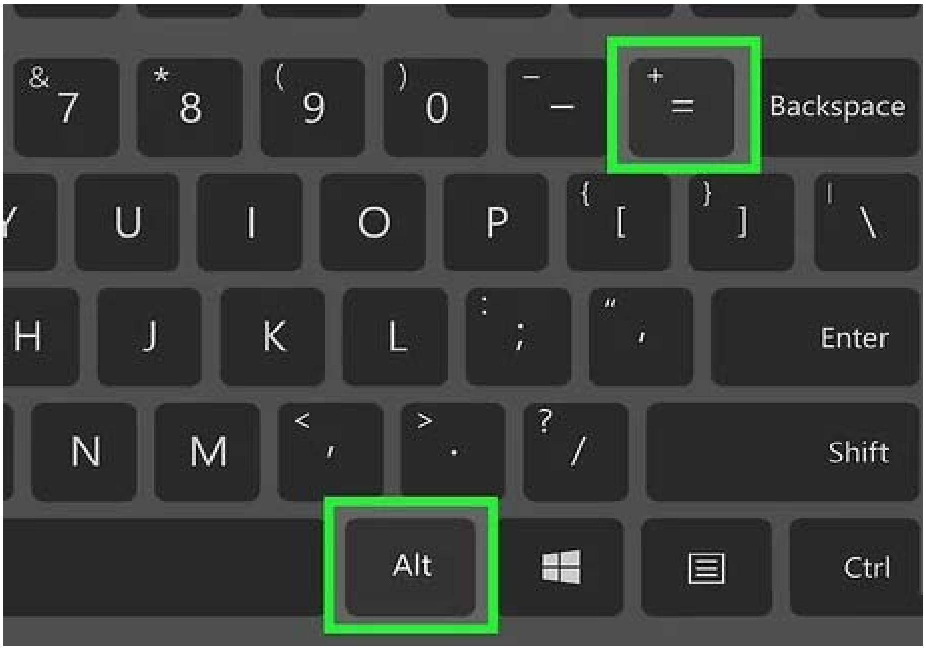
بالإمكان إدراج المعادلات بجميع أنواعها وتعديلها.

هذه المعادلات لا تقوم بعمل العمليات الحسابية.

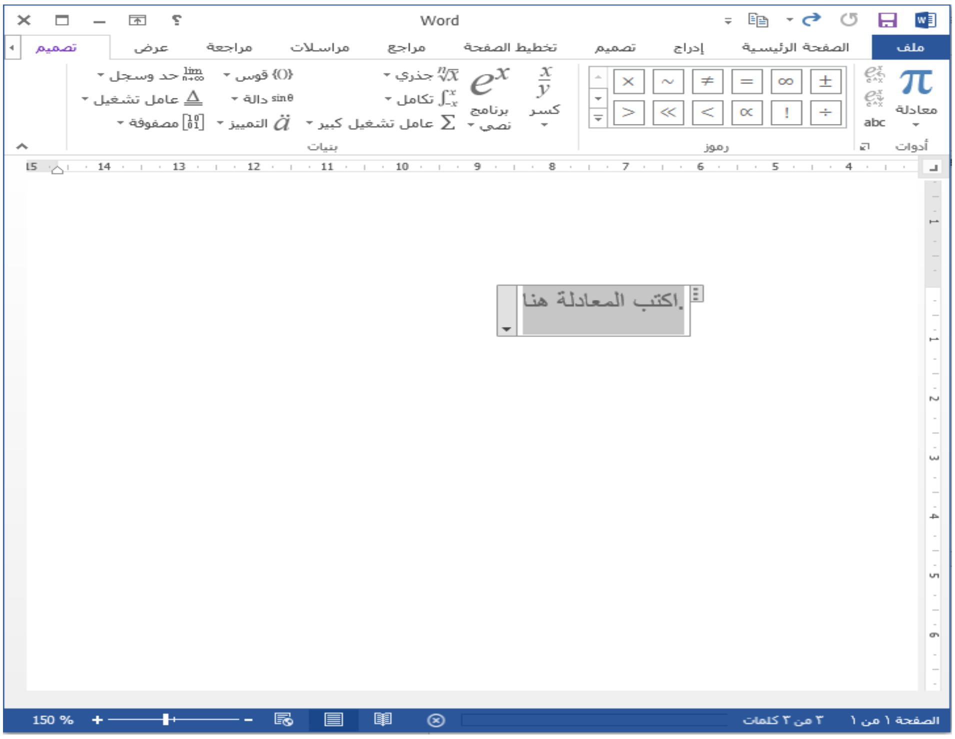
الطريقة الأولى:

استخـــدام لوحة المفاتيح {مايكروسوفت وورد ٢٠٠٧ حتى الإصدارات الحالية}:

١. اضغط على الزر **Alt** والزر "=":

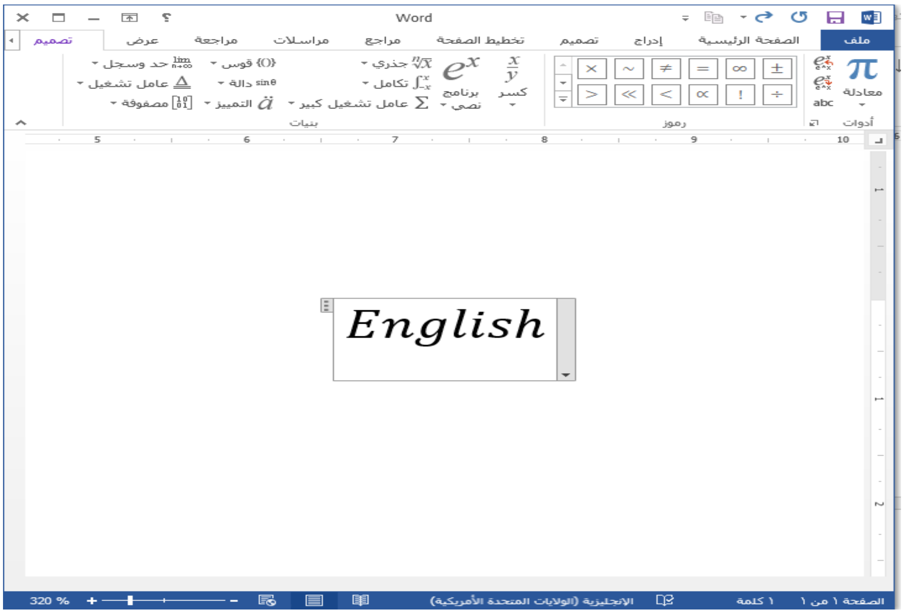


يؤدي ذلك إلى إدراج معادلة في مكان وجود مؤشر الكتابة وفتح محرّر المعادلات.



٢. أدرج الحروف عن طريق الكتابة.

يمكن كتابة حروف إنجليزية لتمثيل المتغيرات عن طريق كتابتها ببساطة.



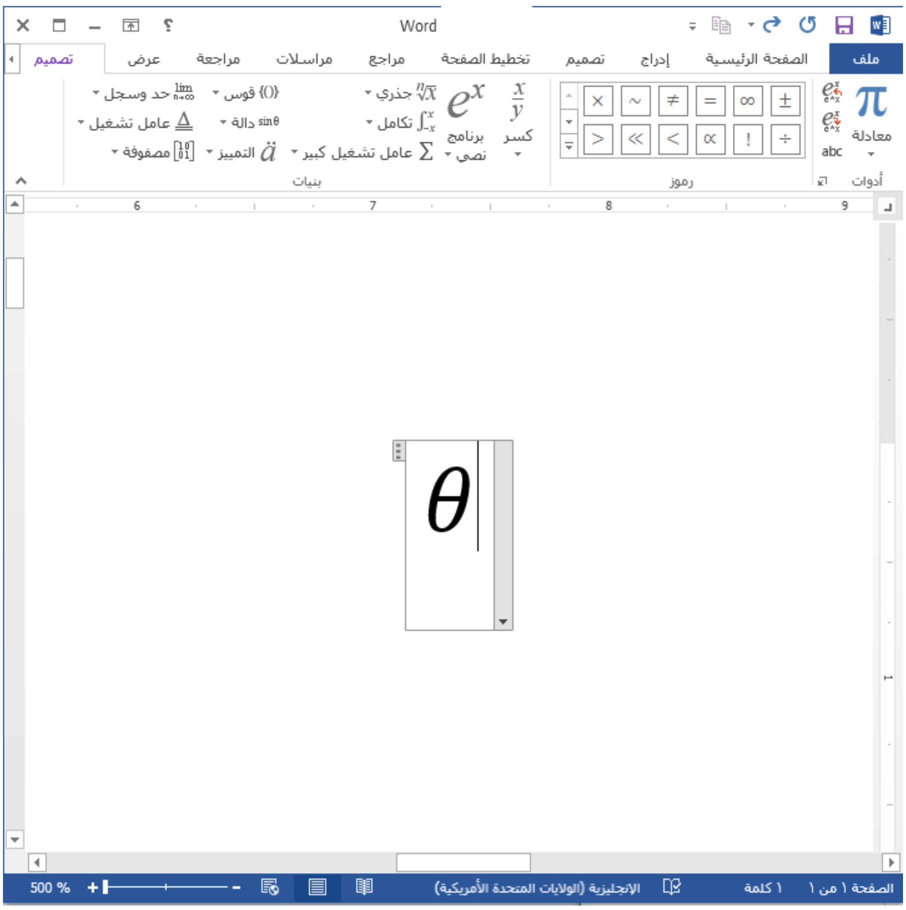
٣. أدرج الرموز عن طريق كتابة \ متبوعة باسم الرمز.

كل ما عليك فعله إن كنت تعرف اسم الرمز هو كتابة \ أولًا ثم كتابة اسم الرمز مباشرة.

إن كنت ترغب بكتابة الرمز الإغريقي ثيتا مثلًا، اكتب \theta:

ثم اضغط على زر المسافة لتحويل الكتابة إلى الرمز.

فتتحول الكتابة إلى الرمز.

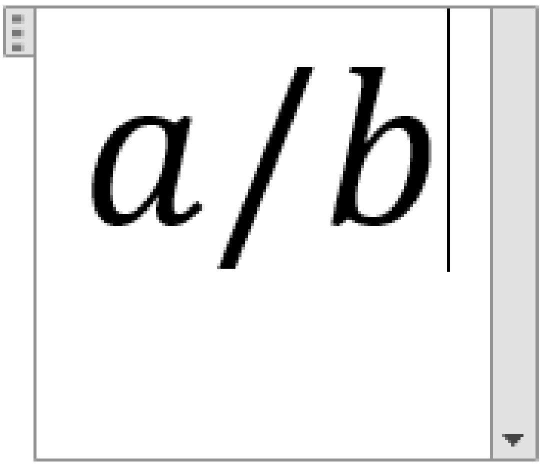


٤. استخدم زر المسافة لتحويل جزء المعادلة الذي تكتبه.

لاحظ أنّ الرمز لم يظهر في الخطوة السابقة إلا بعد الضغط على زر المسافة وينطبق هذا الأمر عند تحرير المعادلة أيضًا.

٥. أدرج الكسور باستخدام الرمز /.

تؤدي كتابة a/b مثلًا؛



(ثم الضغط على زر المسافة) إلى وضع a في خانة البسط ووضع b في خانة المقام وكتابة القيمتين على شكل كسر.

$$\frac{a}{b}$$

٦. اجمع التعبيرات الحسابية باستخدام الأقواس ().

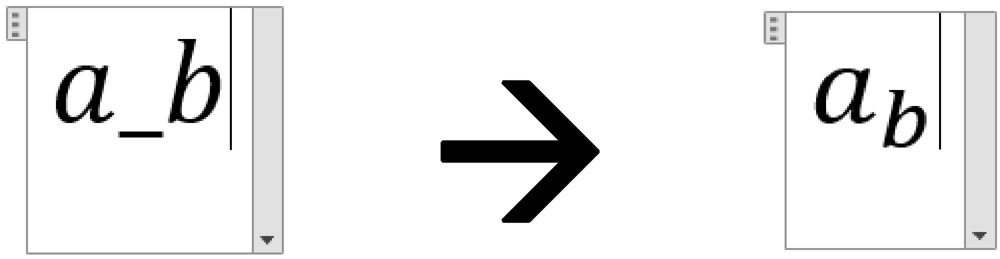
تستخدم الأقواس لجمع أجزاء المعادلة بداخل محرّر المعادلات.

على سبيل المثال: يؤدي كتابة (a+b)/c إلى كتابة التعبير a+b في خانة البسط دون إظهار الأقواس.

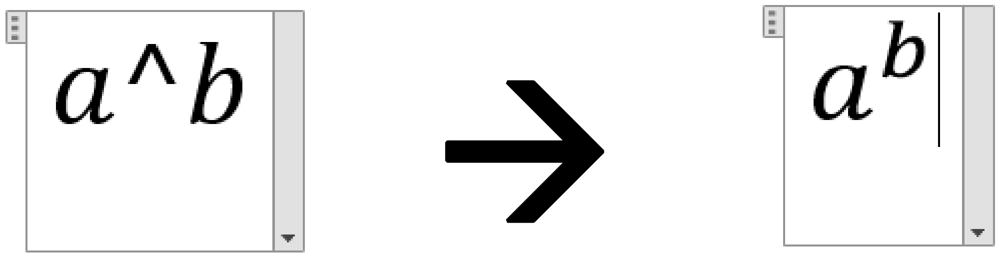
$$(a+b)/c \rightarrow \frac{a+b}{c}$$

٧. استخدم الرموز _ و ^ لكتابة القيم التحتية (السفلية) والفوقية.

يؤدي كتابة a_b مثلًا إلى جعل القيمة b قيمة سفلية للقيمة a.

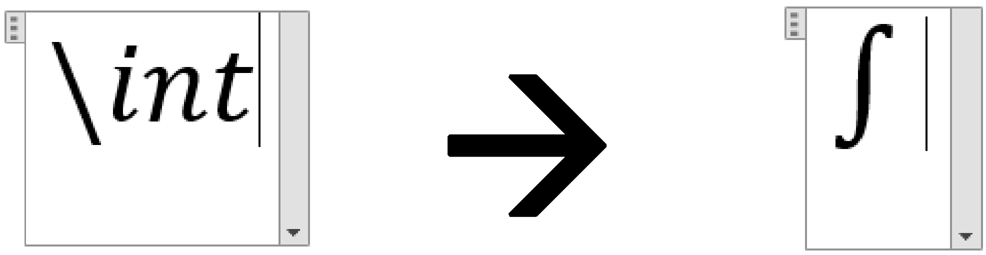


بينما يؤدي كتابة a^b إلى جعل القيمة b قيمة فوقية للقيمة a.

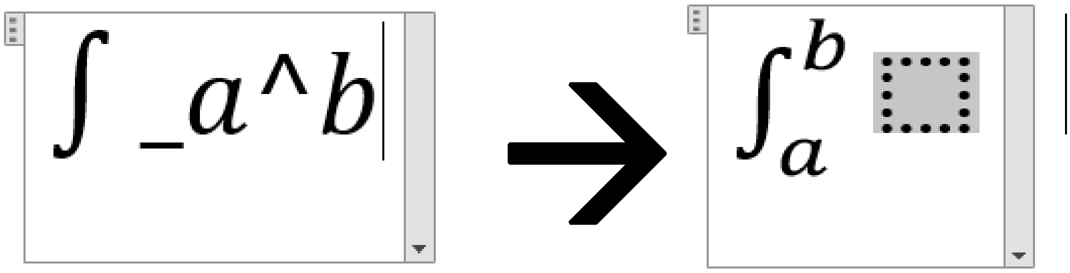


ويمكن استخدام الرموز الفوقية والسفلية في نفس الوقت وهذه هي طريقة كتابة محرّر المعادلات للحدود في معادلات التكامل.

يؤدي كتابة \int_a^b مثلًا والضغط على زر المسافة إلى كتابة صيغة تكامل من a إلى b؛ فنكتب أولاً \int والضغط على زر المسافة.



فتظهر صيغة تكامل؛ ثم نكتب a^b_ بعدها ونضغط على زر المسافة.

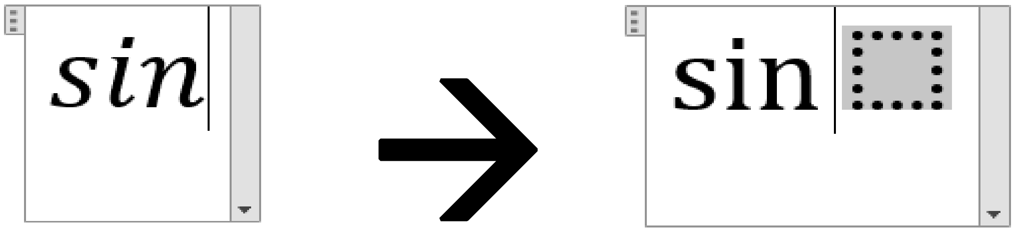


فتظهر حدود صيغة التكامل من a إلى b، مع ظهور مربع المحتوى الداخلي.

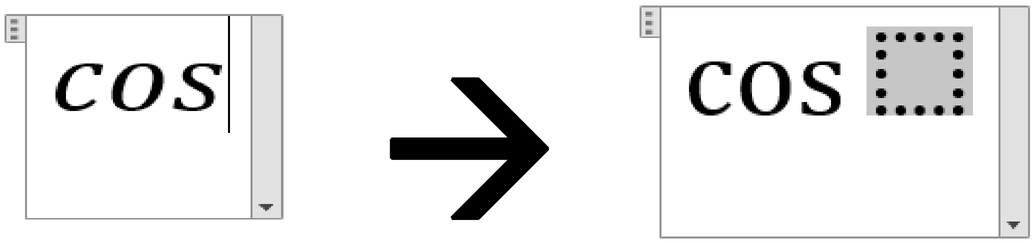
٨. أدرج الدوال عن طريق الضغط على زر المسافة بعد اسم الدالة.

يمكن التعرّف على الدوال المثلثية مثل الجيب وقوس الظل وكذلك اللوغاريتم والدالة الأسية إلّا أنّك تحتاج للضغط على زر المسافة بعد كتابة اسم الدالة حتى يتعرّف محرّر المعادلات عليها على أنّها دالة حسابية.

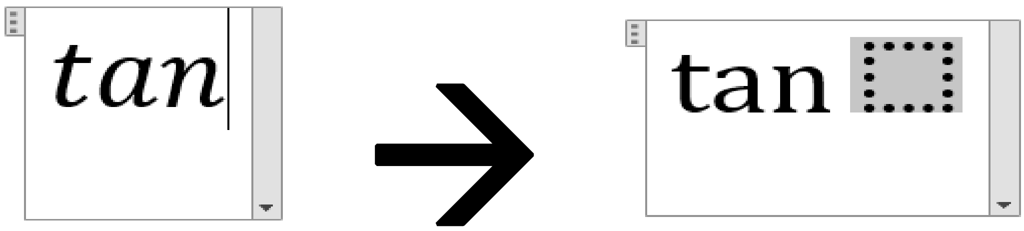
دالة الجيب sin:



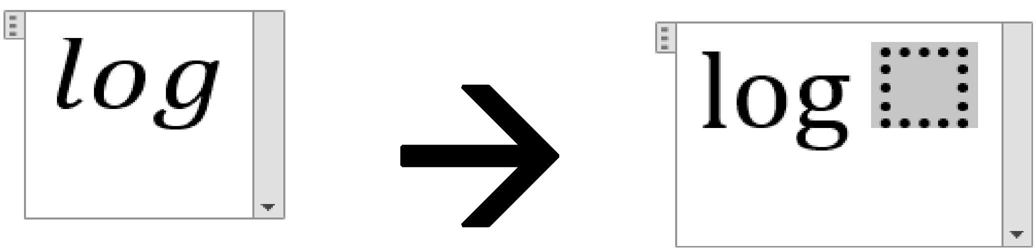
دالة الجيب تمام cos:



دالة الظل tan:



اللوغاريتم:

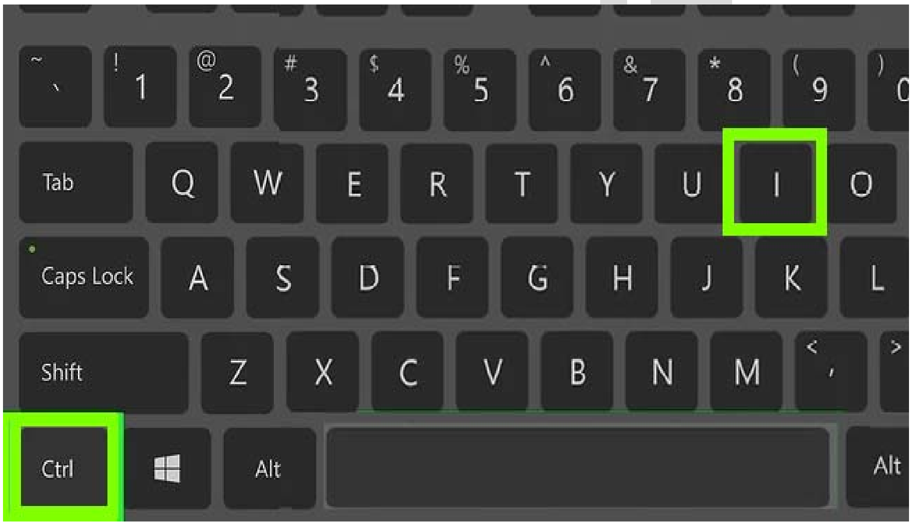


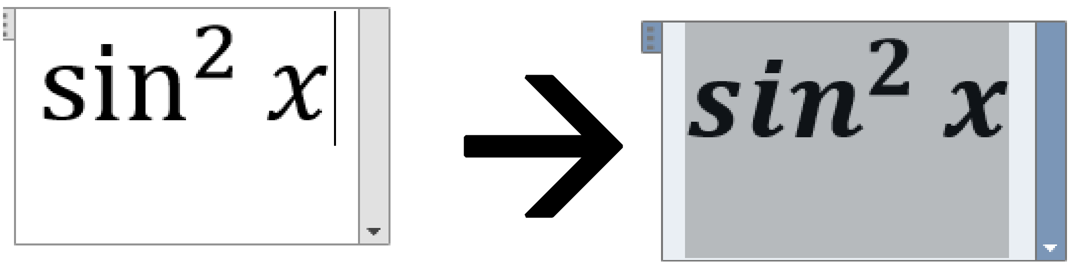
٩. أحدث تغيّرات في الخط.

يمكن تغيير الخطوط أثناء العمل ويمكنك استخدام اختصارات لوحة المفاتيح العادية للتحويل بين الخط العريض والمائل:

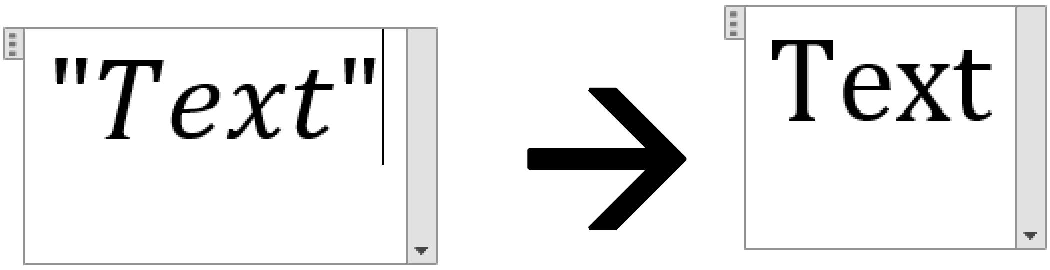
الخط العريض Ctrl + B :

أو الخط المائل Ctrl + I .

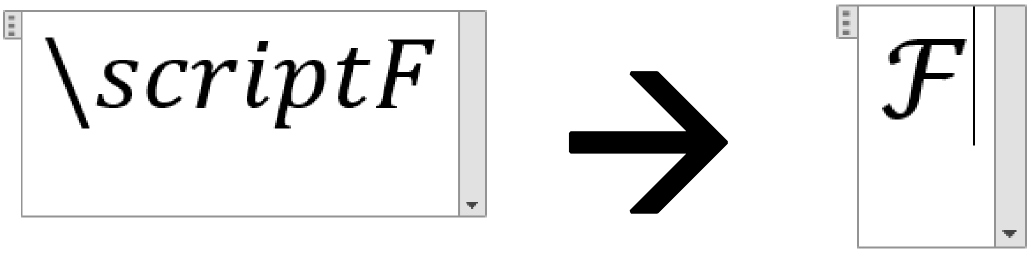




لكتابة نص "عادي" بداخل معادلة، أحِط النص بعلامات تنصيص "".



ولتحويل حرف إلى حرف معادلات استخدم الصيغة script\، كأن تكتب مثلًا : scriptF\ لتحويل الحرف F إلى شكله في المعادلات.



١٠. ابحث عن اختصارات أخرى.

كتابة المعادلات أسرع بكثير من اختيار الرموز والهيكليات من القائمة، إلّا أنّ ذلك ينطوي على تعلّم الكثير من الاختصارات ويمكنك من خلال الخطوات السابقة تخمين معظم الاختصارات التي تحتاج إليها.

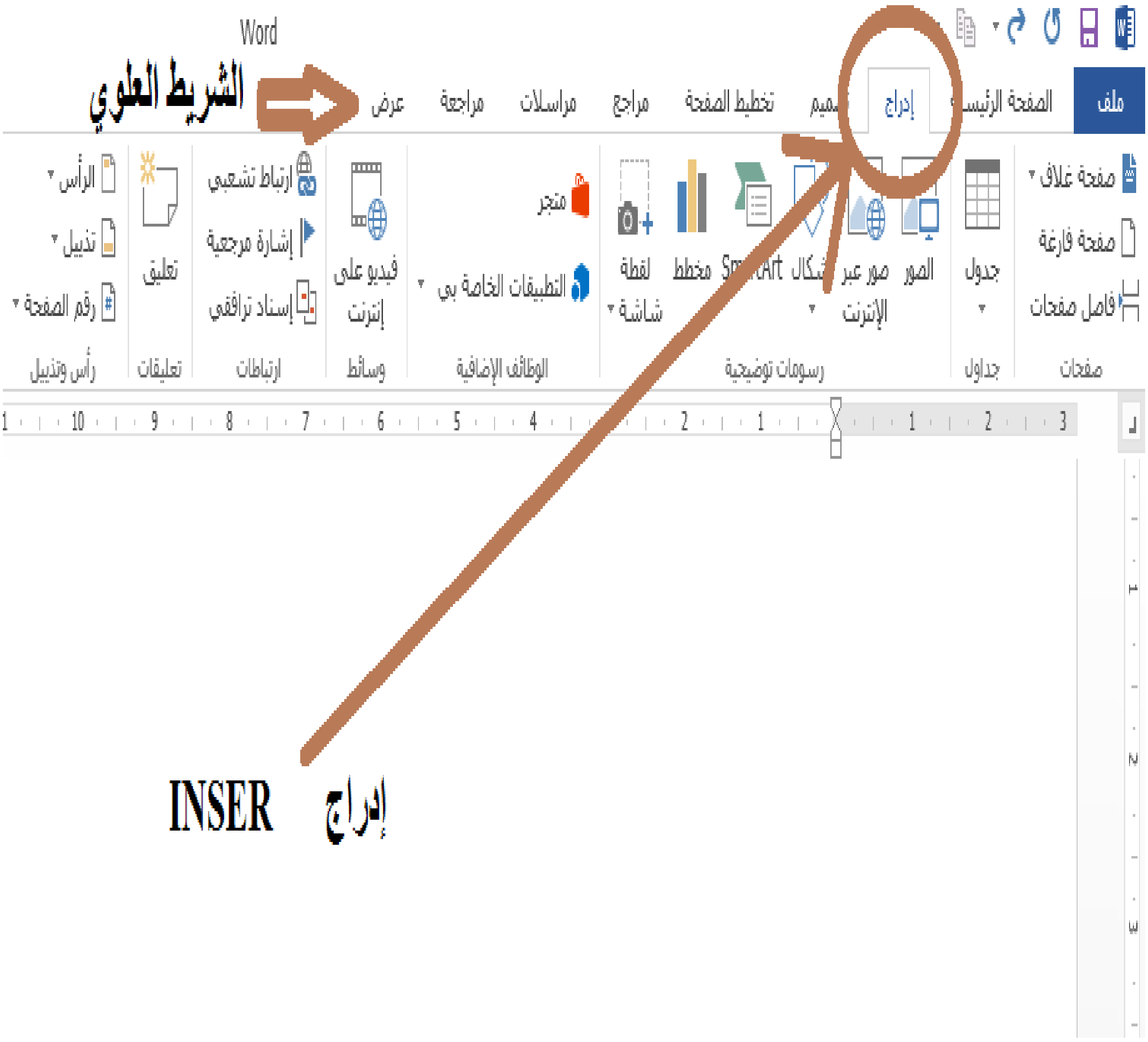
الطريقة الثانية:

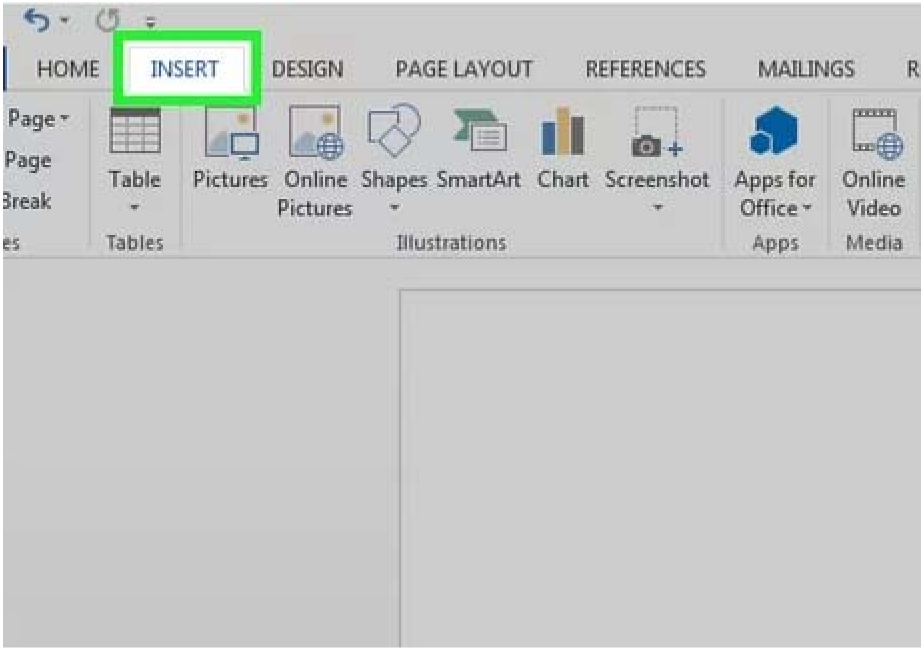
استخـــدام خيار إدراج معادلة {مايكروسوفت وورد ٢٠١٦ أو ٢٠١٣ أو ٢٠١٠ أو ٢٠٠٧}:

١. **اختر لسان تبويب الإدراج في الشريط العلوي.**

الشريط العلوي هو القائمة الأفقية الموجودة بين عنوان المستند والمستند نفسه ويمكنك البحث عن لسان تبويب الإدراج في الصف العلوي من هذه القائمة والنقر عليه.

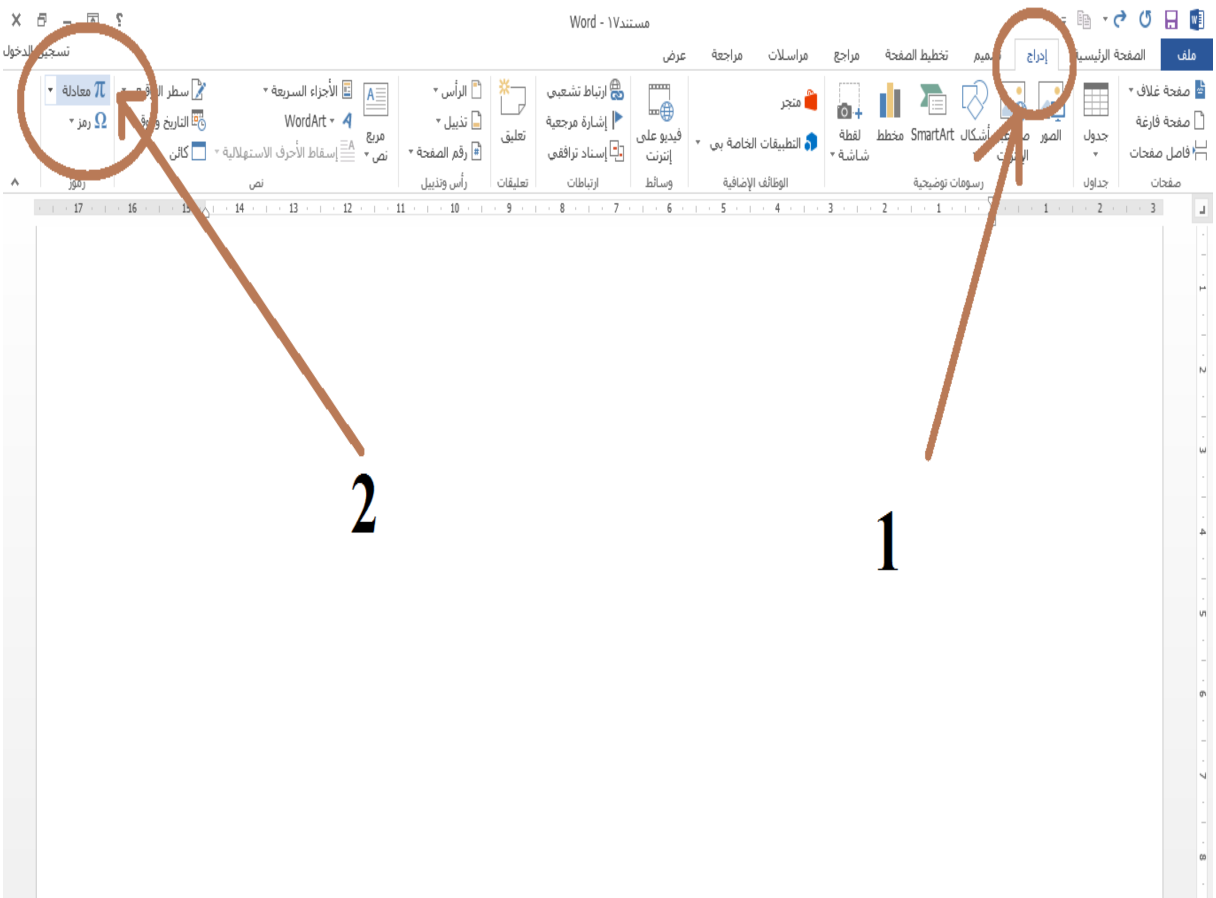
لسان تبويب الإدراج "إدراج" أو "INSERT".



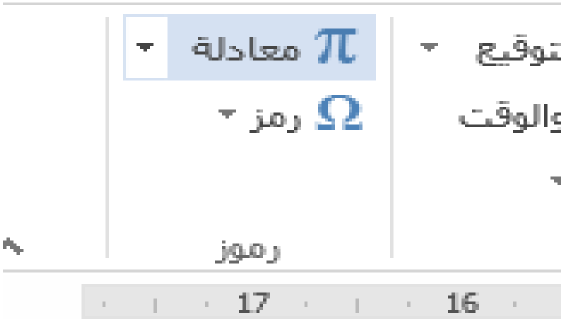


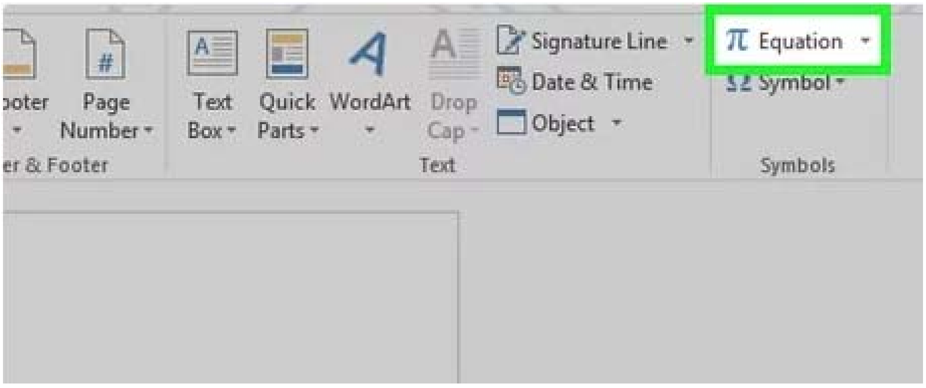
٢. ابحث عن زر المعادلات أقصى الجهة اليمنى من الشاشة.

تحتوي قائمة الإدراج على العديد من الخيارات وما يهمنا هو خيار المعادلات أقصى الجهة اليمنى.



تكـــــــــون هذه الأيقونة على شكل رمز باي (π) كبير ضمن مجموعة اسمها "الرموز".





٣. **انقر على الأيقونة لإدراج معادلة.**

يؤدي ذلك إلى ظهور صندوق في مكان مؤشّر الكتابة.

وسيتم تفعيل قائمة تعديل المعادلات Equation Tool لإضافة العمليات الرياضية والرموز.

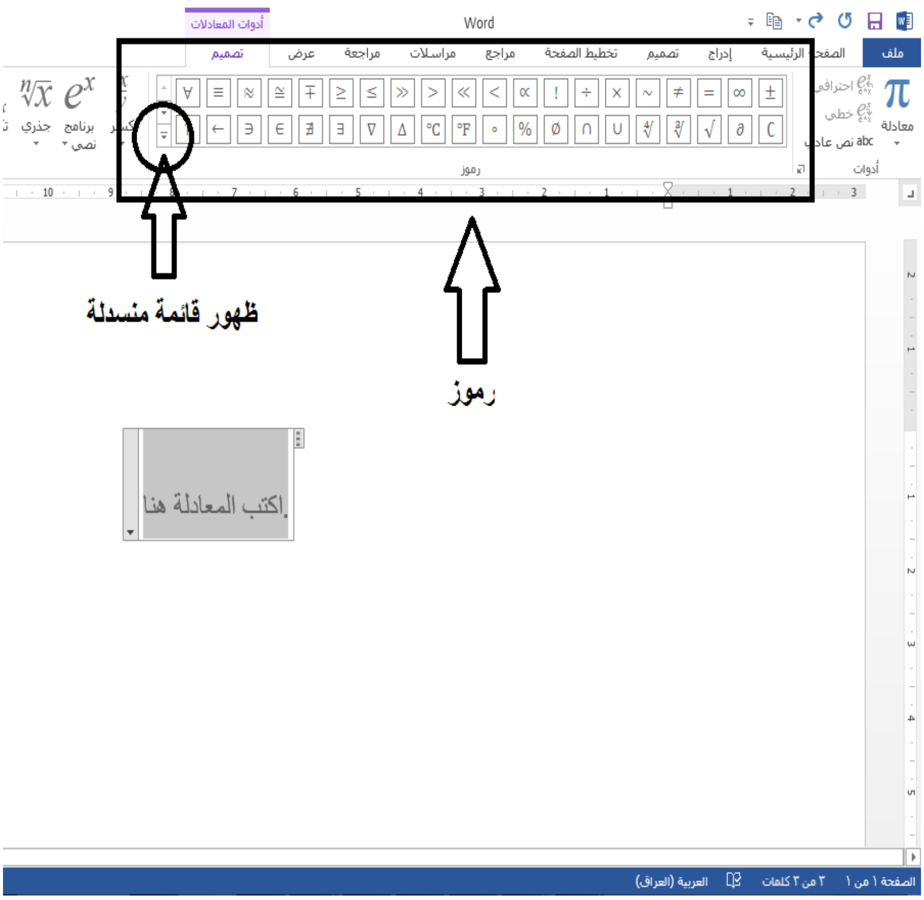
ويمكنك البـــدء بالكتابة علـــى الفـــــور لتكـــــوين المعادلة أو الانتقال إلى الخطـــــــــــوة التالية للاطلاع على مزيد من الخيارات.

٤. **أدرج تنسيقًا خاصًا.**

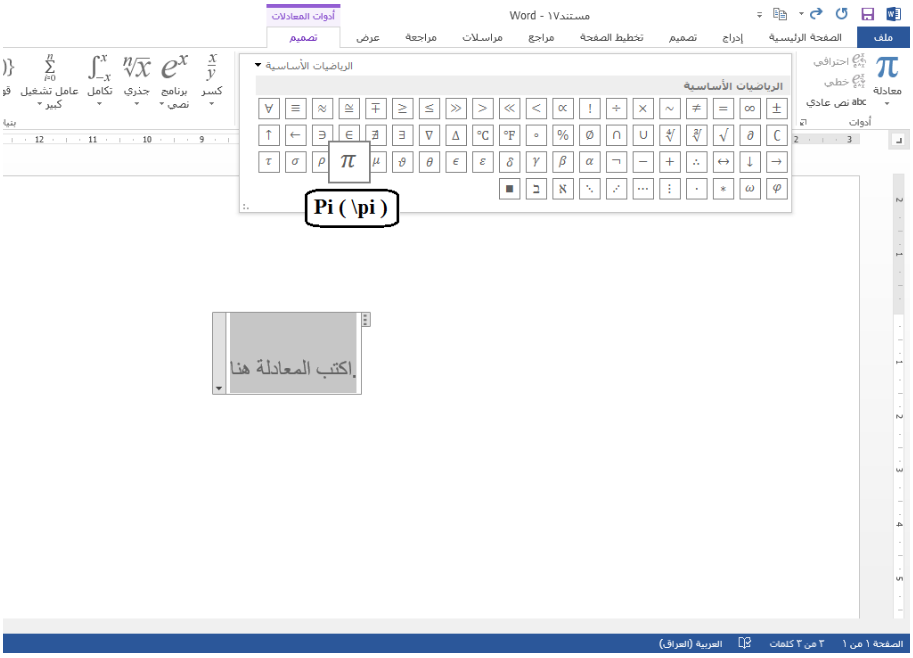
سيتحـــول الشريط العلـــــوي إلى عرض مجمـــــــــوعة كبيرة من الخيارات الجديدة بعد النقـــــــــر على أيقونة المعادلات، ويمكنك تصفّـــــح الخيارات لمعـــــرفة ما تحتاج إليه ثم الكتابة لإكمال المعادلة.

إليك مثال مفصّل:

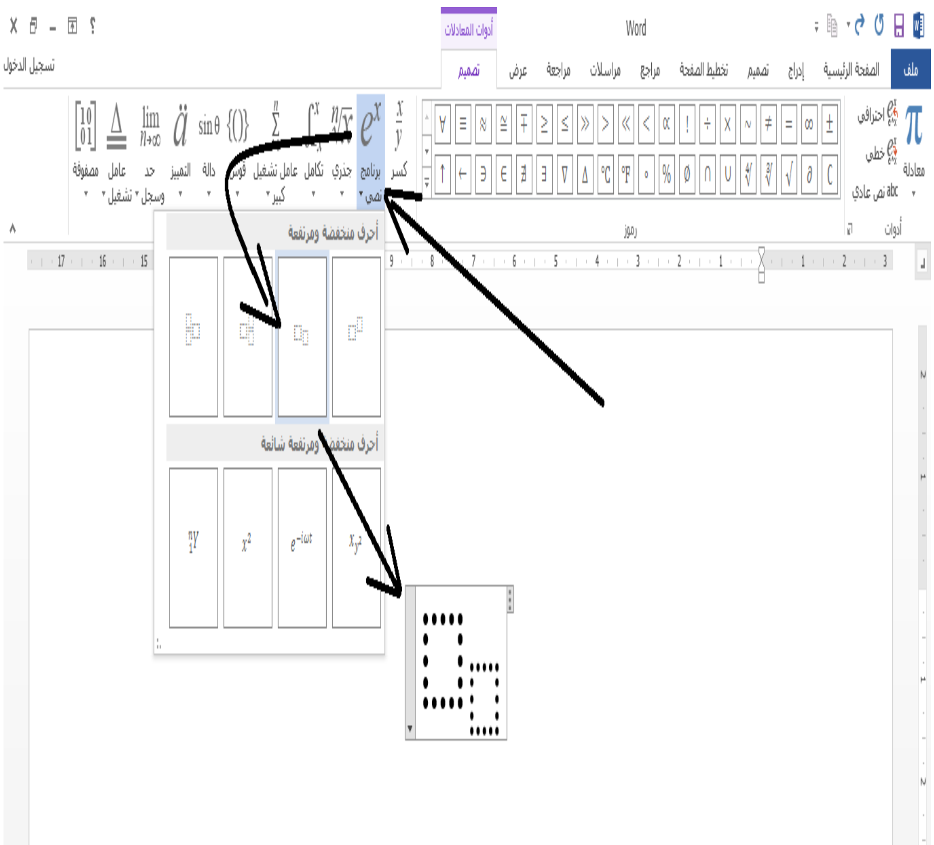
- انقر على أيقونة الرموز لإظهار قائمة منسدلة.



- حرّك مــؤشر الفأرة فوق كل زر لتظهر رسالة إرشادية تعلمك بوظيفته.



- اختر خيار الرمز السفلي البسيط ليظهر صندوقان في المعادلة بحيث يكون أحدهما أسفل الآخر:



- انقر على الصندوق الأول واكتب القيمة التي ترغب بعرضها:

$$A_{\square}$$

- انقر على الصندوق الثاني واكتب القيمة السفلية:

$$A_2$$

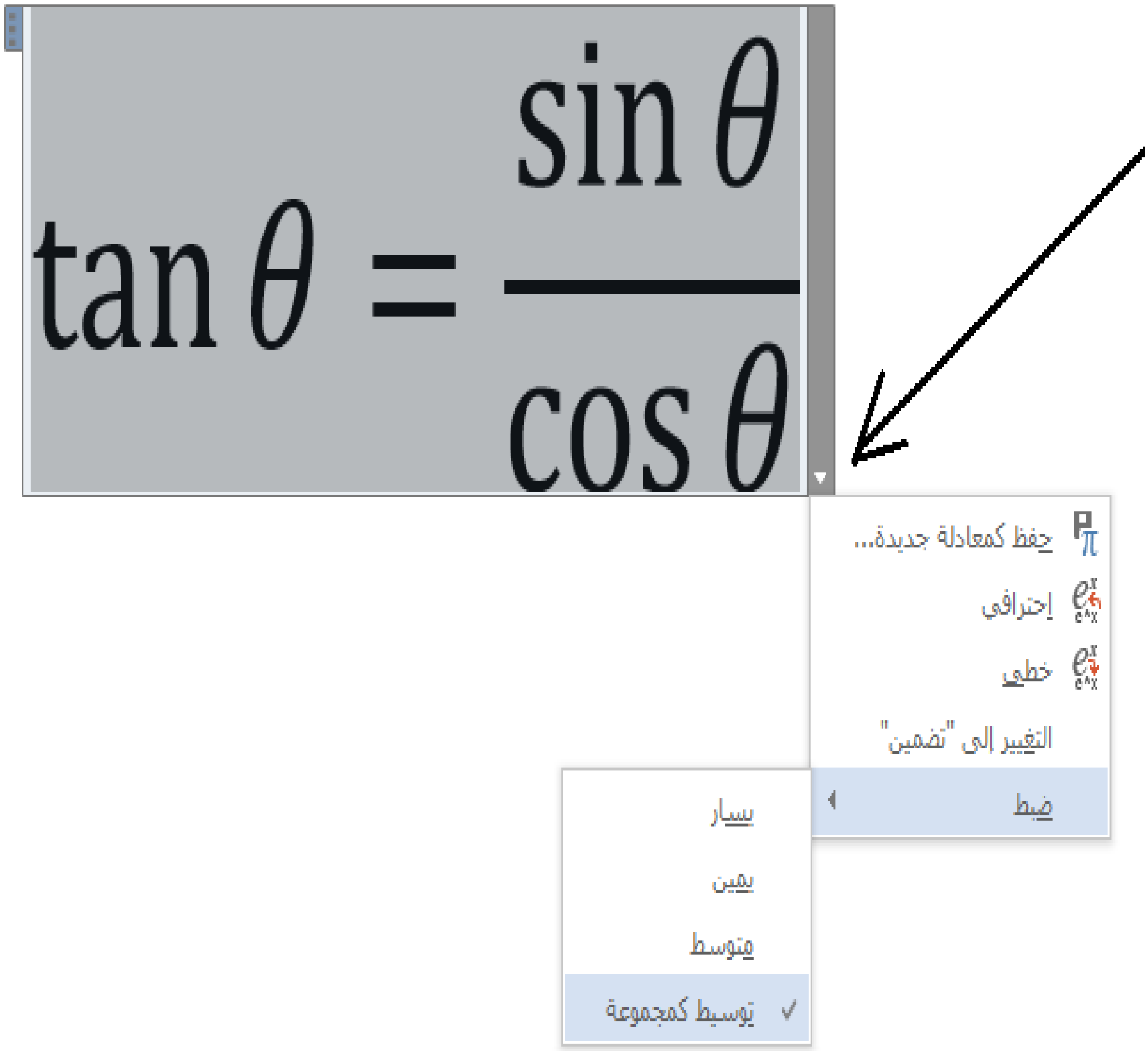
٥. استمر بالكتابة لإكمال المعادلة.

استمـــــــر بالكتابة لإكمال المعادلة إن لم تكن تحتاج إلى أي تنسيق خاص آخر وسيقـــــوم برنامج وورد بإدراج المسافات وإمالة المتغيرات من تلقاء نفسه.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

٦. حرّك المعادلة في الصفحة.

اختر الصندوق النصـــــــي للمعادلة بالكامل ليظهر لك لسان تبويب يحتوي على سهم في الجهة اليمنى ويمكنك النقر على هذا الزر لإظهار قائمة خيارات بصـــــــرية تتضمّن وضع المعادلة في المنتصف أو في اليسار أو في اليمين.



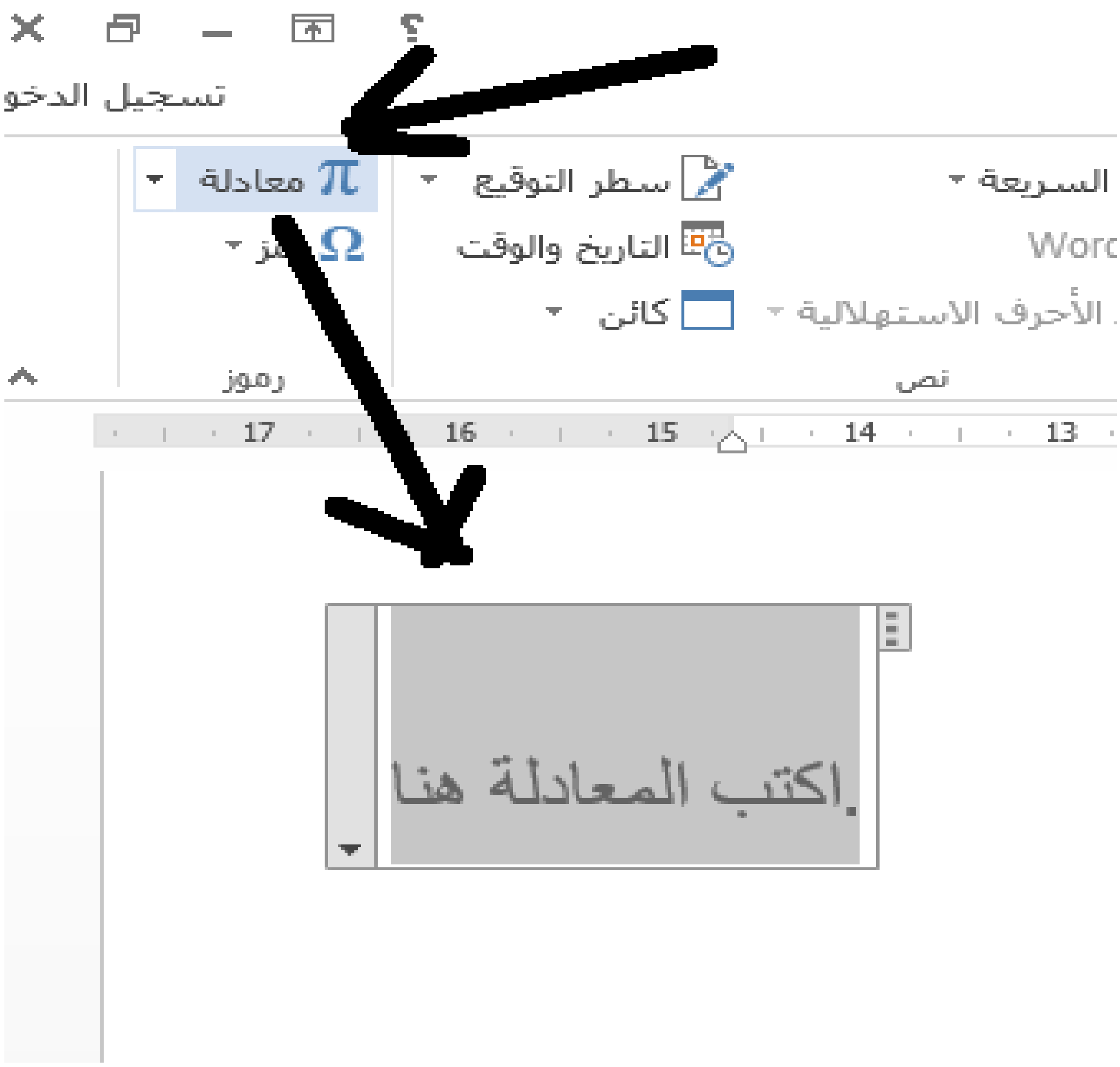
- يمكنك أيضًا تظليل النص الموجود في المعادلة وتغيير حجم الخط وشكله بالطريقة المعتادة.

٧. إدراج معادلة جاهزة والتعديل عليها.

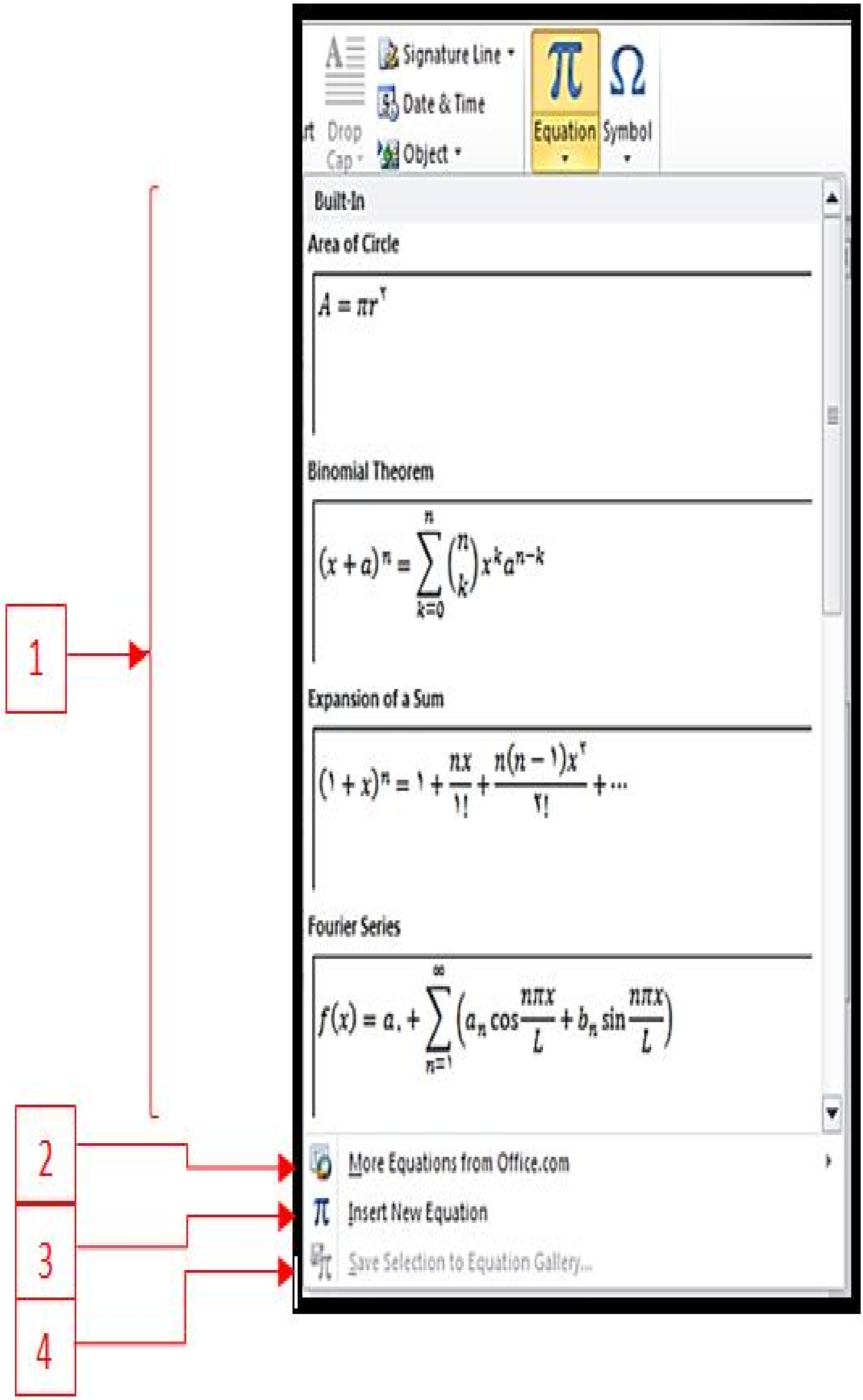
يمكنك إدراج معادلة جاهزة والتعديل عليها.

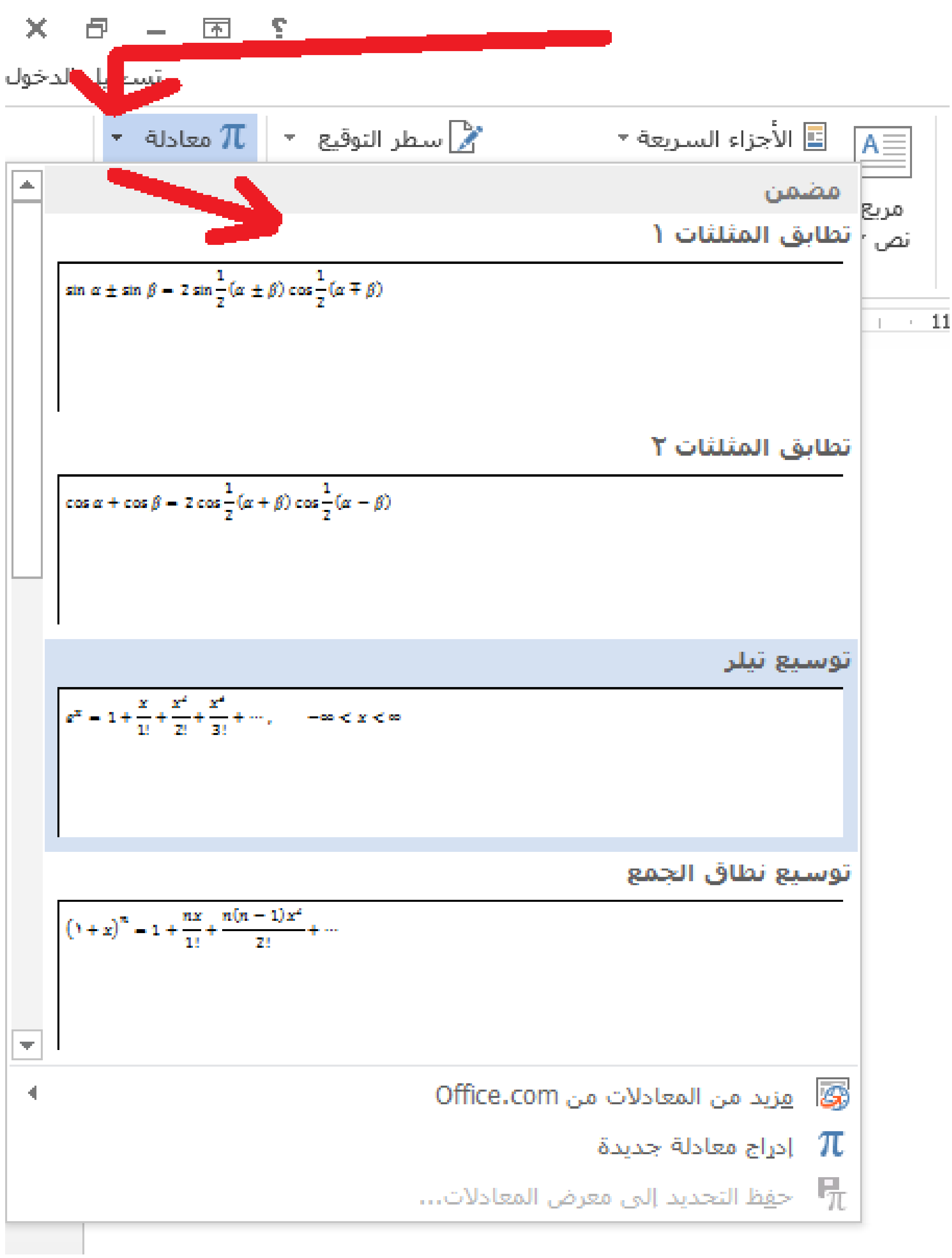
}ملاحظة:

الضغط على أيقونة معادلة (نفس الأيقونة) سيؤدي إلى إدراج صندوق لكتابة معادلة جديدة في مكان مؤشّر الكتابة؛



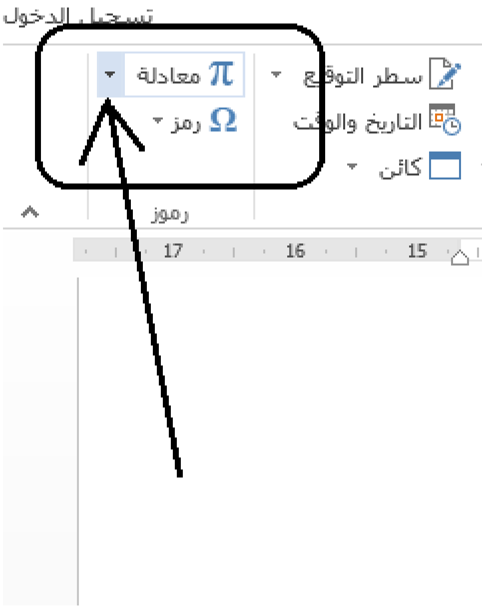
أمّا الضغط على سهم القائمة المنسدلة على يسار أيقونة إدراج المعادلة فسيؤدي إلى فتح قائمة منسدلة تتضمن مجمـــــــــوعة من المعادلات الشائعة الاستخدام:


Signature Line
Date & Time
Object
Drop Cap
Equation
Symbol
Built-In
Area of Circle
Binomial Theorem
Expansion of a Sum
Fourier Series
More Equations from Office.com
Insert New Equation
Save Selection to Equation Gallery...
1
2
3
4

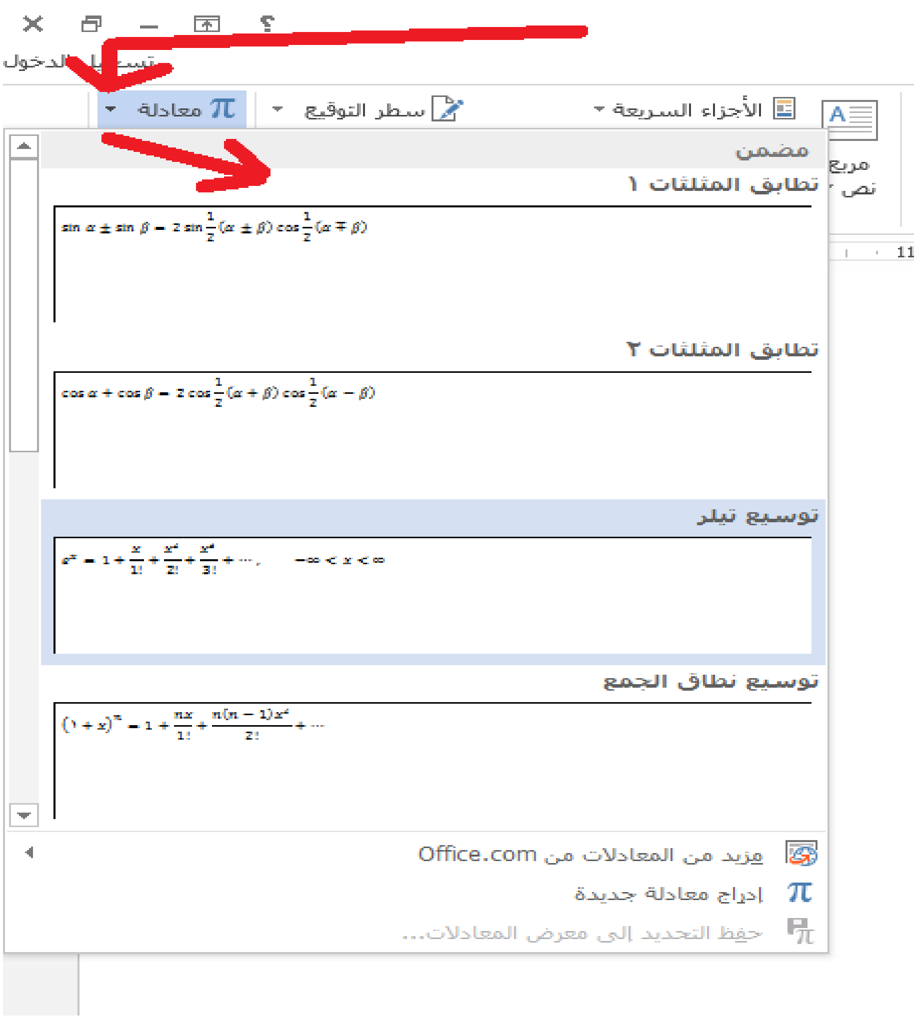


يمكن إدراج أي واحدة من هذه المعادلات الشائعة الاستخدام (معادلات جاهزة مستخدمة ومعروفة)، والتعديل عليها، أو إختيار معادلات جاهزة أخرى من موقع اوفيس {More Equations From Office.com}.

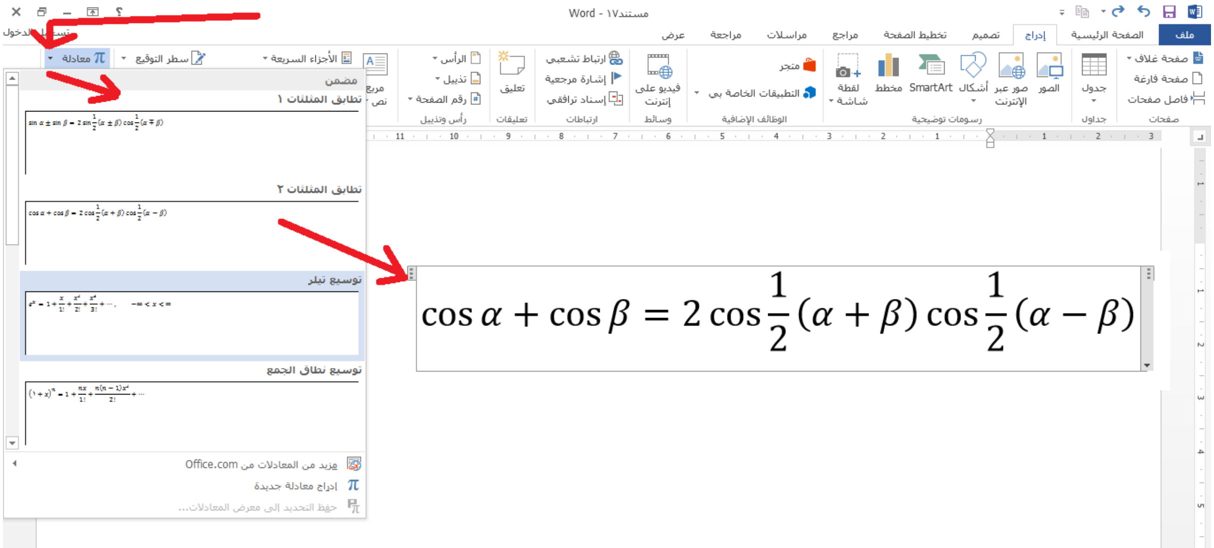
اضغط على سهم القائمة المنسدلة على يسار أيقونة إدراج المعادلة.



فتظهر قائمة منسدلة تتضمن مجموعة من المعادلات الشائعة الاستخدام:



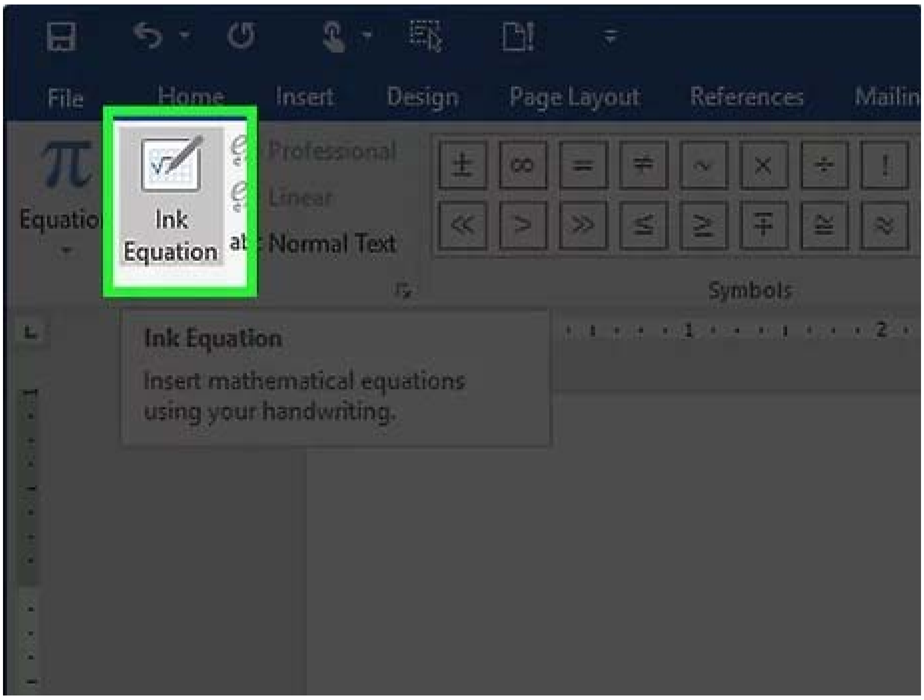
يمكن إدراج أي واحدة من هذه المعادلات، والتعديل عليها:



٨. **اكتب المعادلة يدويًا (وورد ٢٠١٦ فقط).**

يمكنك إنشاء معادلة عن طريق رسمها باستخدام مؤشر الفأرة أو شاشة اللمس إن كنت تستخدم برنامج وورد ٢٠١٦.

اختر خيار رسم معادلة Ink Equation من قائمة المعادلات المنسدلة للبدء.

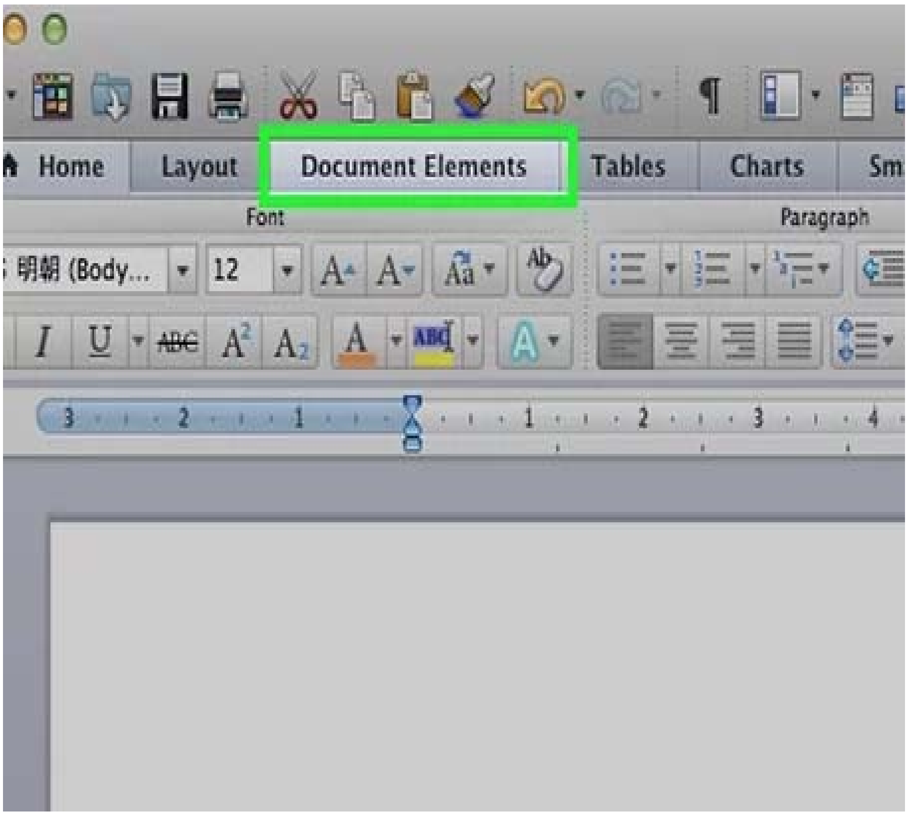


الطريقة الثالثة:

استخـــدام لسان تبويب عناصر المستند {أوفس لنظام ماكنتوش ٢٠١٦ أو ٢٠١١}:

١. اختر لسان تبويب عناصر المستند.

يكون لسان التبويب هذا في الشريط العلوي أسفل صف الأيقونات العلوي مباشرة.



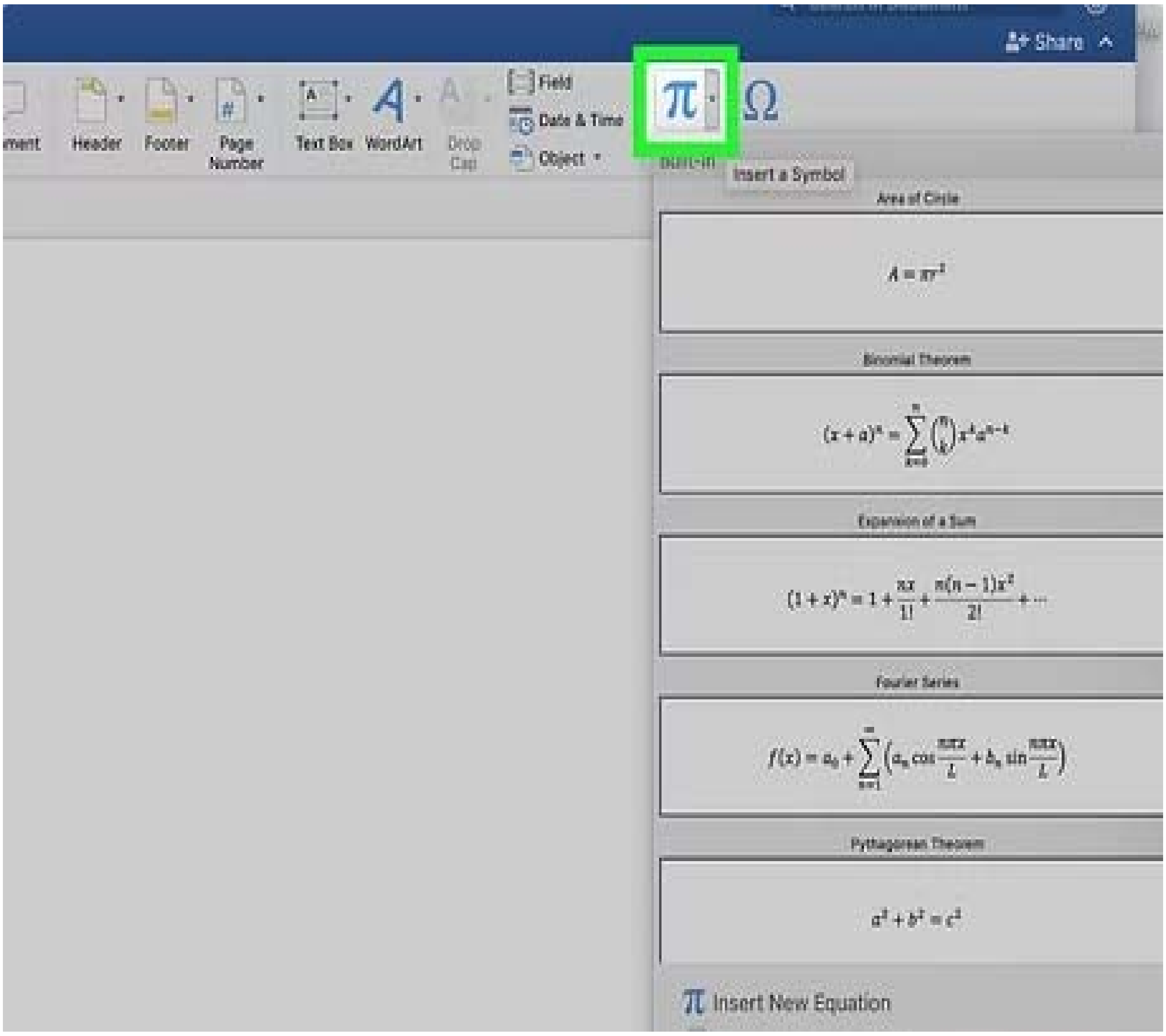
٢. اختر المعادلات من أقصى الجهة اليمنى.

يكـــــون خيار المعادلات أقصى الجهة اليمنى وتكـــون الأيقونة على شكل π بعد اختيار عناصر المستند.

ستجد ثلاثة خيارات هنا:

- انقر على السهم المجاور لأيقونة المعادلات للاطلاع على قائمة منسدلة للمعادلات شائعة الاستخدام.

- انقر على السهم ثم انقر على خيار إدراج معادلة جديدة لكتابة المعادلة بنفسك.
- انقر على الأيقونة نفسها لفتح قائمة أكبر تحتوي على خيارات المعادلة في الشريط العلوي.

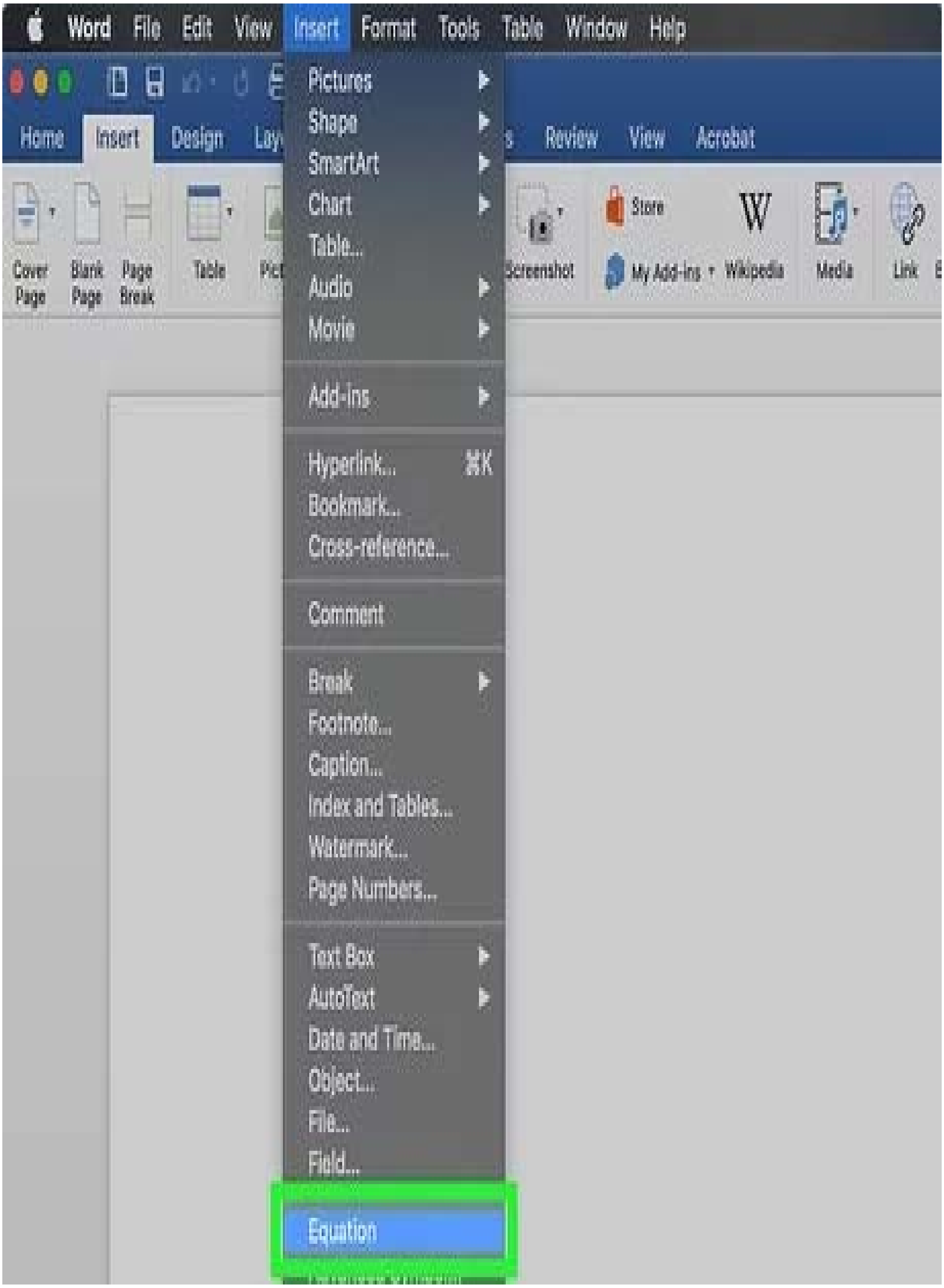


٣. استخدم القائمة العلوية عوضًا عن ذلك.

إن كنت تفضّل استخدام القائمة العلوية، انقر على الخيار "إدراج" ثم توجّه نحو الأسفل حتى تصل إلى "المعادلات" في القائمة المنسدلة.

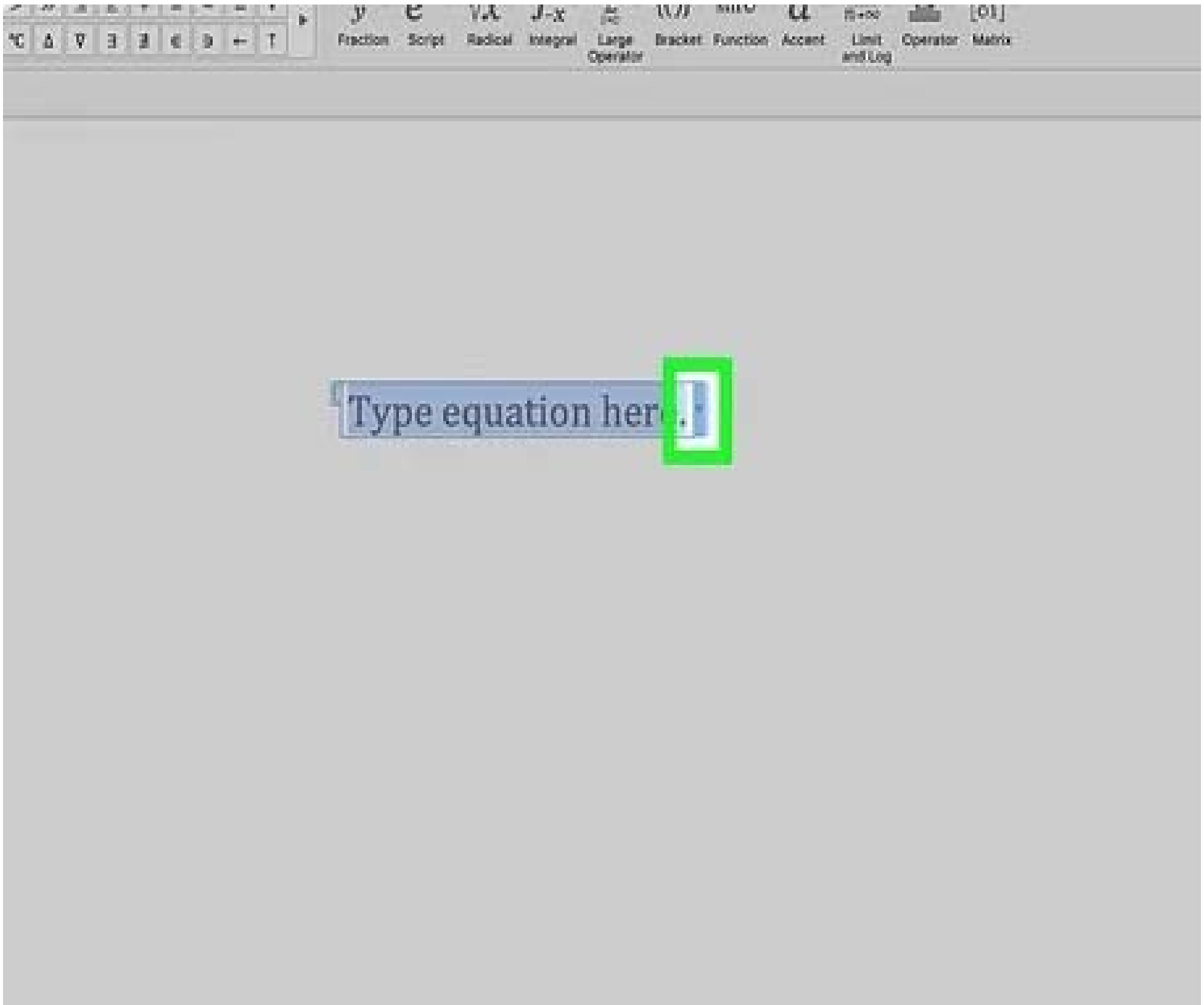
يجب أن يكون مؤشر الكتابة في مكان فارغ في المستند حتى تصل إلى هذا الأمر.

(سيكـــون هذا الخيار معطّلًا إن كان هناك عنصر محدد على سبيل المثال).



٤. اختر خيارات العرض.

انقـــــر على السهم الذي يشير نحو الأسفل الموجود إلى يمين صندوق المعادلة لتظهر قائمة منسدلة تحتوي على خيارات تعديل كيفية عرض المعادلة.



تحتوي هذه القائمة أيضًا على أمـــــر "حفظ كمعادلة جديدة"؛ وهذا الأمر مفيد إن كنت تخطط لاستخدام المعادلة بشكل متكرّر، وهو ما يضيف المعادلة إلى القائمة المنسدلة التي تظهر عند النقر على السهم المجاور لأيقونة المعادلة.

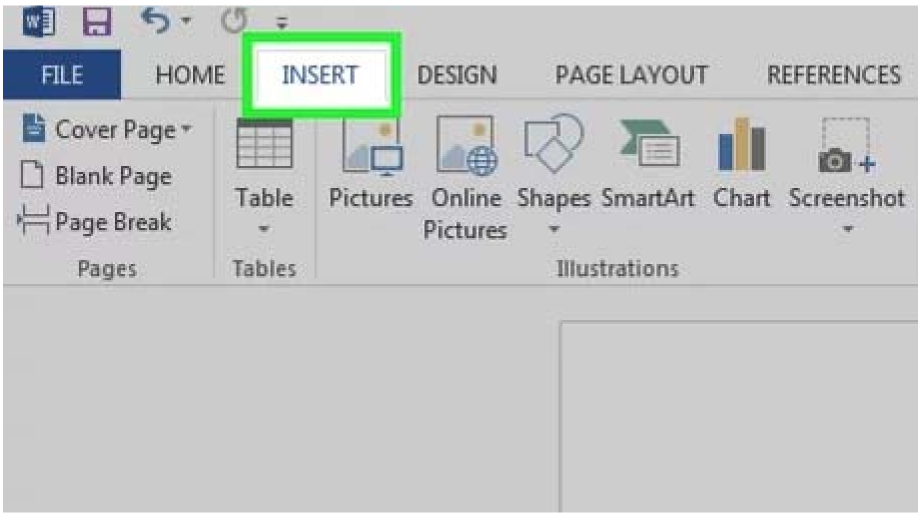
الطريقة الرابعة:

اعرف القيود {مايكروسوفت وورد ٢٠٠٣}:

١. اعرف القيود.

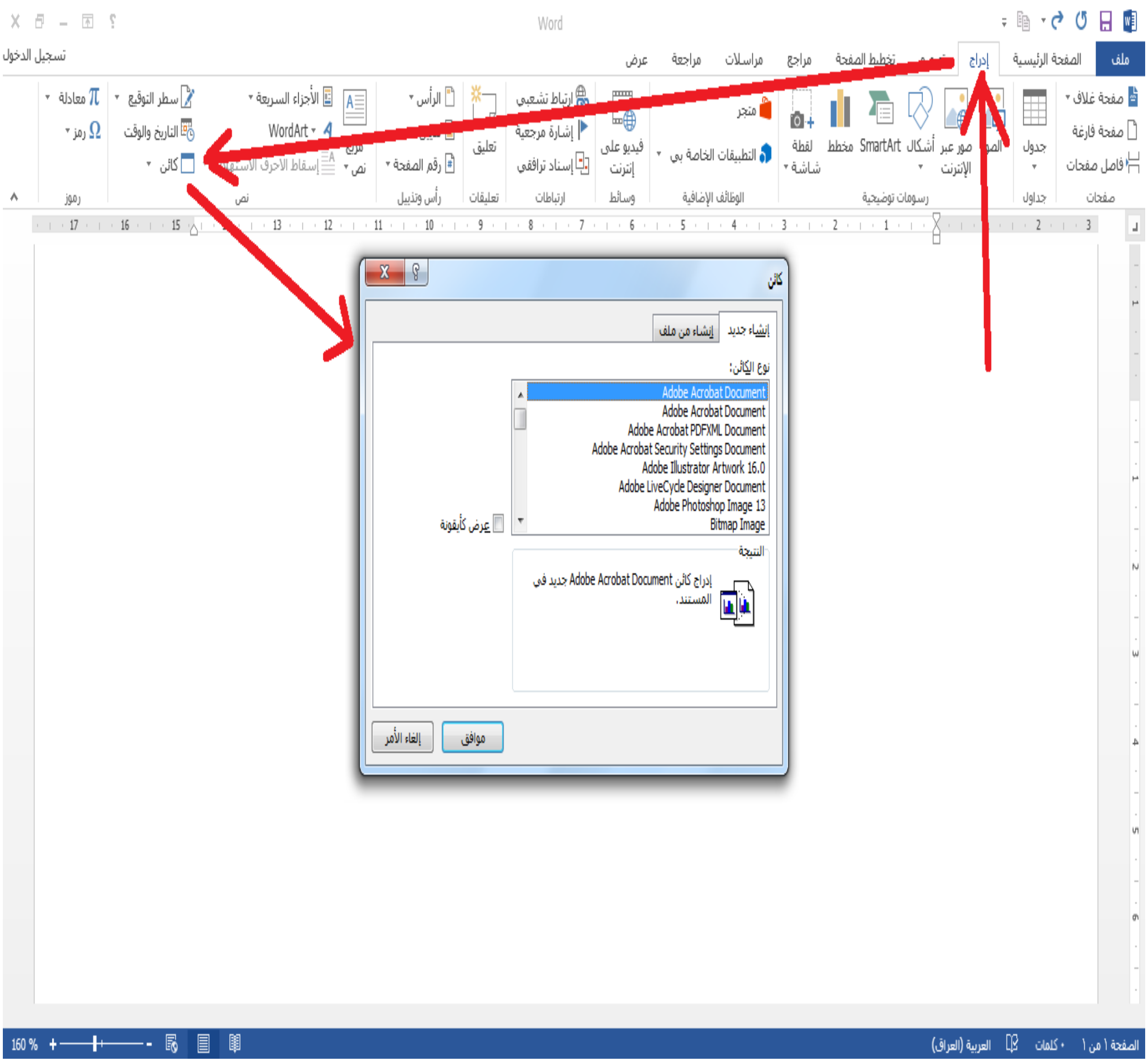
لا يمكن تحرير المعادلات المكتوبة في وورد ٢٠٠٣ أو الإصدارات الأقدم في إصدارات وورد الأحدث، لذا فإنّه يفضّل الترقية لإصدار أحدث إن كنت تتعاون مع مستخدمين آخرين عبر برنامج وورد.

٢. حاول أن تدرج معادلة.



استخدم القائمة العلوية لاختيار خيار:

الإدراج Insert ← عنصر Object ← إنشاء عنصر جديد Create New.



إن وجدت "Microsoft Equation 3.0" أو "Math Type" ضمن قائمة العناصر، اختر هذا الخيار لإدراج معادلة أو انتقل للخطوة التالية إن لم تجد هذه العناصر.

ستظهر نافذة صغيرة تحتـــوي على عدة رمـــوز بعد إدراج معادلة ويمكنك النقر على هذه الأزرار واختيار الرمـــز الذي ترغب بإدراجه في المعادلة.

لا يحتوي برنامج وورد ٢٠٠٣ على نفس خيارات التنسيق الموجودة في الإصدارات الأحدث ويمكن أن تظهر بعض المعادلات بصورة أقل احترافية مما اعتدت عليه.

٣. ثبّت اللاحقة إن احتجت لذلك.

ستحتاج إلى تثبيت لاحقة إن لم تكن نسخة مايكروسوفت وورد ٢٠٠٣ الموجودة على جهازك تحتوي على الإضافات المذكورة أعلاه.

من الصعب إيجاد هذه اللاحقات القديمة في عصرنا الحالي، إلّا أنّك قد تجد حزمة التثبيت على جهازك بالفعل:

- أغلق كل برامج مايكروسوف أوفس.
- افتح قائمة ابدأ Start ← لوحة التحكم Control Panel ← إضافة وحذف البرامج Add or Remove Programs.
- اختر أوفس Microsoft Office ← تغيير Change ← إضافة وحذف الخصائص Add or Remove Features ← التالي Next.
- انقر على الزر + المجاور لأدوات أوفس.
- اختر محرّر المعادلات Equation Editor ثم انقر على تشغيل Run ← تحديث Update.
- اتبع الإرشادات الظاهـــــرة على الشاشة.
- قد تحتاج إلى اسطوانة تثبيت وورد ٢٠٠٣ إن لم تكن محظوظًا.

أفكار مفيدة:

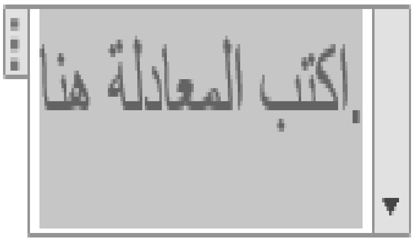
- لإنشاء السطر الثاني من المعادلة، استخدم اختصار لوحة المفاتيح Shift + Enter.

يؤدي الضغط على زر الإدخال إلى الخروج من المعادلة أو بدء فقرة جديدة في المعادلة اعتمادًا على إصدار وورد المستخدم.

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

وبعد الضغط على زر Shift + Enter:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$



- يتضمّن اشتراك أوفس ٣٦٥ عادة أحدث إصدار من برنامج وورد ويمكنك اتباع إرشادات أحدث إصدار يعمل على نظام تشغيلك.

- إن كنت تستخدم وورد ٢٠٠٧ أو إصدار أحدث وكنت تحاول أن تحرّر معادلة أنشأتها باستخدام وورد ٢٠٠٣ أو إصدار أقـــــــــــــدم، افتح القائمة ملف File ← تحويل Convert لفتح المعادلة وخيارات التحرير الأخرى.

ملاحظة:

لن يتمكن الأشخاص الذين يمتلكون وورد ٢٠٠٣ أو أي إصدار أقدم من تحرير المعادلات الموجودة في الملفات المحفوظة بصيغة docx.

وبعد؛

فـ"تلك محاولاتي وأهدافي فإذا كنت أصبتها فذلك الفضل من الله، {وَمَا بِكُمْ مِنْ نِعْمَةٍ فَمِنَ اللَّهِ} [النحل: ٣٥]، وإن كانت الثانية فإنما هي نفسي وأستغفر الله" [٤]، "فإذا ظفرت أيها الطالب بمسألة فاخمة فادع لي بحسن الخاتمة، وإذا ظفرت بعثرة فادع لي بالتجاوز والمغفرة" [٥].

ونسأل الله سبحانه وتعالى عزَّ وجلَّ أن يعيننا على التفرغ لطاعته وعبادته، وأن يحبب إلينا الإيمان ويزينه في قلوبنا، وأن يكره إلينا الكفر والفسوق والعصيان، وأن يجعلنا من الراشدين.

اللَّهمَّ إنِّي أسألُكَ فعلَ الخيراتِ، وتركَ المنكراتِ، وحُبَّ المساكينِ، وأن تغفِرَ لي وترحَمَني، وإذا أردتَ فتنةً في قومٍ فتوفَّني غيرَ مفتونٍ، وأسألُكَ حبَّكَ وحبَّ من يحبُّكَ، وحبَّ عملٍ يقرِّبُ إلى حُبِّكَ [٦]...

اللَّهمَّ إنِّي أسألُكَ مِنَ الخيرِ كلِّهِ عاجلِهِ وآجلِهِ، ما عَلِمْتُ منهُ وما لم أعلَمْ، وأعوذُ بِكَ مِنَ الشَّرِّ كلِّهِ عاجلِهِ وآجلِهِ، ما عَلِمْتُ منهُ وما لم أعلَمْ، اللَّهمَّ إنِّي أسألُكَ من خيرِ

---

٤ مناهل العرفان في علوم القرآن؛ الشيخ محمد عبد العظيم الزرقاني.

٥ حاشية إعانة الطالبين على حل ألفاظ فتح المعين لشرح قرة العين بمهمات الدين ١-٤ ج٤؛ ص٥٧٠: نقلا عن ابن الوردي.

٦ حديثٌ صحيحٌ؛ صَحَّحَهُ الشيخ الألباني في صحيح الترمذي ٣٢٣٥؛ أخرجه الترمذي ٣٢٣٥ واللفظ له، وأحمد ٢٢١٦٢.

ما سألَكَ عبدُكَ ونبيُّكَ، وأعوذُ بِكَ من شرِّ ما عاذَ بِهِ عبدُكَ ونبيُّكَ، اللَّهمَّ إنِّي أسألُكَ الجنَّةَ وما قرَّبَ إليها من قَولٍ أو عملٍ، وأعوذُ بِكَ منَ النَّارِ وما قرَّبَ إليها من قولٍ أو عملٍ، وأسألُكَ أن تجعلَ كلَّ قَضاءٍ قضيتَهُ لي خيرًا [7]...

اللَّهمَّ! إنِّي أسألُك الثَّباتَ في الأمرِ، والعزيمةَ على الرُّشدِ، وأسألُك موجِباتِ رحمتِك، وعزائمَ مغفرتِك، وأسألُك شُكرَ نعمتِك، وحُسنَ عبادتِك، وأسألُك قلبًا سليمًا، ولسانًا صادقًا، وأسألُك من خيرِ ما تعلَمُ، وأعوذُ بك من شرِّ ما تعلَمُ، وأستغفرُك لما تعلَمُ؛ إنَّك أنت علّامُ الغيوبِ [8]...

"اللَّهُمَّ أَنْتَ أَصْلَحْتَ الصَّالِحِينَ فَأَصْلِحْنَا حَتَّى نَكُونَ صَالِحِينَ" [9].

سُبْحَانَ رَبِّكَ رَبِّ الْعِزَّةِ عَمَّا يَصِفُونَ * وَسَلَامٌ عَلَى الْمُرْسَلِينَ * وَالْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

وَصَلّي اللَّهُمَّ وسَلِّمْ وَبَارِكْ عَلَى نَبِيِّنا مُحَمَّدٍ، وَعَلَى آلِهِ وَصَحْبِهِ أجمعين.

---

٧ حديثٌ صحيحٌ؛ صَحَّحَهُ الشيخ الألباني في صحيح ابن ماجه ٣١١٦؛ أخرجه مسلم (٢٧١٦) مختصراً.

٨ حديثٌ إسناده صحيح؛ أخرجه الشيخ الألباني في السلسلة الصحيحة ٣٢٢٨.

٩ {٦٧ حَدَّثَنَا سُوَيْدُ بْنُ سَعِيدٍ، قال حدثنا الْحَكَمُ بْنُ سِنَانٍ، قَالَ: كَانَ مَالِكُ بْنُ دِينَارٍ يَقُولُ: اللَّهُمَّ أَنْتَ أَصْلَحْتَ الصَّالِحِينَ فَأَصْلِحْنَا حَتَّى نَكُونَ صَالِحِينَ} ["حديث رقم ٦٧ - من كتاب التوبة لابن أبي الدنيا - التوبة لابن أبي الدنيا"، و"٥٣٧١٨٠ - ٨٥ ~ أبو نعيم الأصبهاني في حلية الأولياء - مَالِكُ بْنُ دِينَارٍ - حديث رقم ٢٩٣٧"].

الْفِهْرِسُ

صَدَرَ للمُؤَلِّفِ:

١. الخادم المحلّي Local Server. {أَحَد مساقات حَقِيبَةِ: "الوَجِيزُ فِي بَرْمَجَةِ المَوَاقِعِ"}.

https://jasimabed.com/books/?b=1

٢. خُطْوَةٌ خُطْوَةٌ في تَعْلِيمِ وتَعَلُّمِ اللُّغَةِ التُّرْكِيَّةِ: الخُطْوَةُ الأُولَى: القِرَاءَةُ والكِتَابَةُ.

Adım Adım Türkçe Öğrenme ve Öğretme: Birinci Adım: Okuma ve yazma

https://jasimabed.com/books/?b=2

٣. "الأَرْبَعُونَ فِي مَبَانِي الإِسلَامِ وَقَوَاعِدِ الأَحكَامِ" المشهورة بـ "الأَرْبَعِينَ النَّوَوِيَّة". لِلإِمَامِ النَّوَوِيّ مَعَ زِيَادَةِ ابْنِ رَجَبِ الحَنْبَلِيّ؛ بِاللُّغَةِ العَرَبِيَّةِ وَالتُّرْكِيَّةِ وَالإِنْكِلِيزِيَّةِ.

"İslamın Temelinde ve Ahkam Kurallarında Kırk Hadis"; "NEVEVİ KIRK HADİSİ" olarak bilinir; Müellifi: İmam Nevevi، İbn-i Receb el-Hanbeli'nin eklemesiyle. Arapça، Türkçe ve İngilizce

"The Forty in the Buildings of Islam and the Rules of Judgments"; Which is famous as "An-Nawawi's Forty Hadiths"; By Al-Imam Al-Nawawi with the addition of Ibn Rajab al-Hanbali. Arabic، Turkish and English

https://jasimabed.com/books/?b=3

٤. الوَجِيزُ فِي تَصْرِيفِ الأَزْمِنَةِ فِي اللُّغَةِ التُّرْكِيَّةِ

Türkçede Zamanların Kısaca Özeti

https://jasimabed.com/books/?b=4

٥. الأَفْعَالُ الأَكْثَرُ اسْتِخْدَامًا فِي اللُّغَةِ التُّرْكِيَّةِ

Türkçede En Çok Kullanılan Fiiller

https://jasimabed.com/books/?b=5

٦. سَنَابِلُ الحَسَنَاتِ. ﴿الأَعْمَالُ ذَوَاتُ الأُجُورِ المُضَاعَفَاتِ﴾.

https://jasimabed.com/books/?b=6

٧. إِنَّ اللهَ لَيَضْحَكُ، وَيَرْضَى، وَلَهُ الأَسْمَاءُ الحُسْنَى وَالصِّفَاتُ العُلَى.

https://jasimabed.com/books/?b=7

٨. فَأَعِنِّي عَلَى نَفْسِكَ بِكَثْرَةِ السُّجُودِ؛ عَدَدُ الرَّكَعَاتِ الَّتِي يُصَلِّيهَا الْمُسْلِمُ فِي الْيَوْمِ وَاللَّيْلَةِ.

https://jasimabed.com/books/?b=8

٩. شَرْحُ كِتَابِ إِسْطَنْبُولَ - كِتَابُ اللُّغَةِ التُّرْكِيَّةِ لِلأَجَانِبِ؛ الْمُسْتَوى A1.

https://jasimabed.com/books/?b=9

١٠. الْقُرْآنُ الْكَرِيمُ وَتَرْجَمَةُ مَعَانِيهِ إِلَى اللُّغَةِ التُّرْكِيَّةِ؛ {صفحات - سُوَر - آيَات - أحزاب - أجزاء - أرباع}.

KUR'ÂN-I KERİM - DİYANET VAKFI MEÂLİ; {Sayfalar – Sureler – Ayetler – Hizipler – Cüzler – Çeyrekler}.

https://jasimabed.com/books/?b=15

١١. سِلْسِلَةُ كِتَابِ "أَنَا أَقْرَأُ اللُّغَةَ التُّرْكِيَّةَ {Türkçe Okuyorum}": الْمُسْتَوى I.

https://jasimabed.com/books/?b=16

١٢. تُحْفَةُ الْمُقَنْطِرِينَ؛ "كُونُواْ مِنَ الْمُقَنْطِرِينَ والْمُقَنْطِرَاتِ وَالْقَانِتِينَ وَالْقَانِتَاتِ وَالذَّاكِرِينَ اللهَ كَثِيرًا وَالذَّاكِرَاتِ".

https://jasimabed.com/books/?b=26

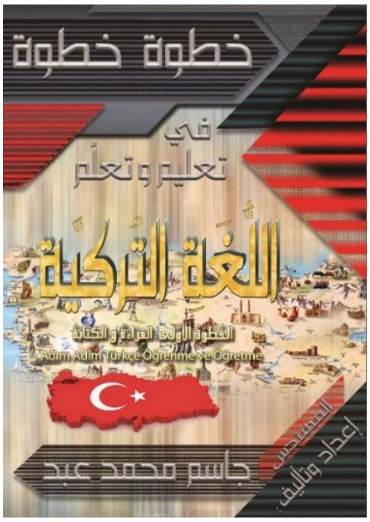
١٣. إِعْرَابُ الْقُرْآنِ الْكَرِيمِ.

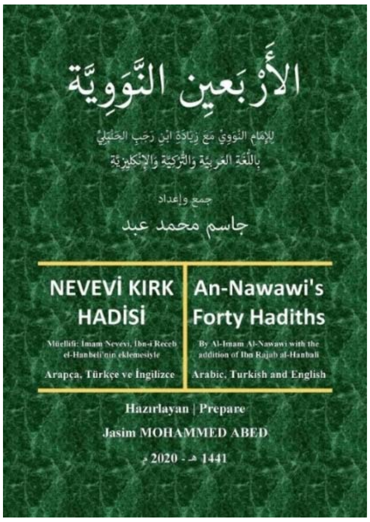
https://jasimabed.com/books/?b=28

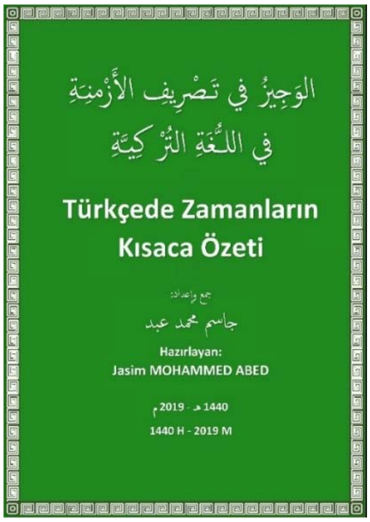
١٤. الْحِسَابُ وَالرِّيَاضِيَّاتُ دُونَ اِسْتِخْدَامِ آلَةٍ حَاسِبَةٍ؛ "حِسَابَاتُ الجُذُورِ التَّرْبِيعِيَّةِ وَالدَّوَالِّ الْمُثَلَّثِيَّةِ".

https://jasimabed.com/books/?b=29

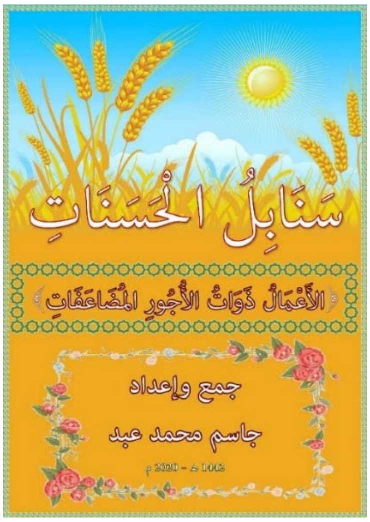

الخادم المحلّي
Local Server
XAMPP
Apache Camel
MAMP
Uniform Server
EASYPHP
VIRGO
Tornado
mako SERVER
NGINX

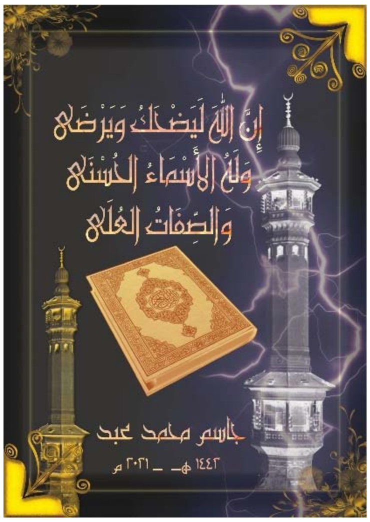

خطوة خطوة
في تعليم وتعلم
اللغة التركية
Adım Adım Türkçe Öğrenme ve Öğretme
إعداد وتأليف
جاسم محمد عبد

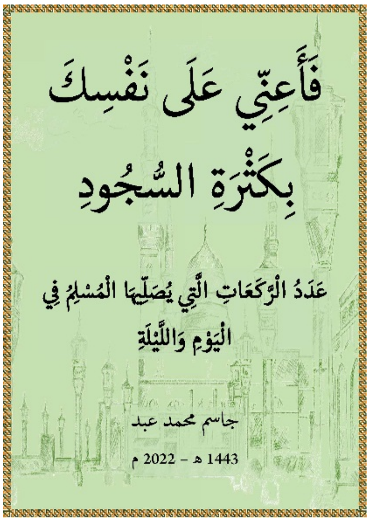

الأَرْبَعِين النَّوَوِيَّة
للإمام النووي مع زيادة ابن رجب الحنبلي
باللغة العربية والتركية والإنكليزية
جمع وإعداد
جاسم محمد عبد
NEVEVİ KIRK HADİSİ
An-Nawawi's Forty Hadiths
Arapça, Türkçe ve İngilizce
Arabic, Turkish and English
Hazırlayan | Prepare
Jasim MOHAMMED ABED
1441 هـ - 2020 م

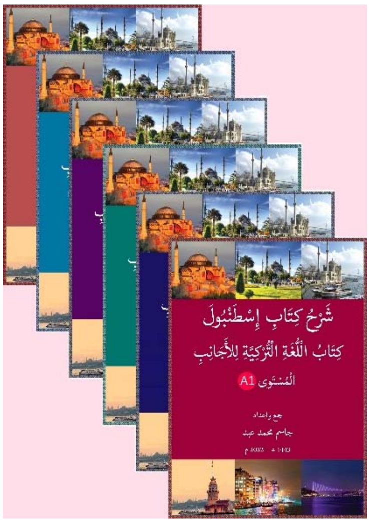

الوَجِيزُ فِي تَصْرِيفِ الأَزْمِنَة
فِي اللُّغَةِ التُّرْكِيَّة
Türkçede Zamanların
Kısaca Özeti
جمع وإعداد:
جاسم محمد عبد
Hazırlayan:
Jasim MOHAMMED ABED
1440 هـ - 2019م
1440 H - 2019 M

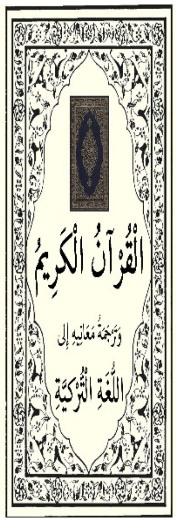

الأَفْعَالُ الأَكْثَرُ اسْتِخْدَامًا
فِي اللُّغَةِ التُّرْكِيَّة
Türkçede En Çok
Kullanılan Fiiller
جمع وإعداد:
جاسم محمد عبد
Hazırlayan:
Jasim MOHAMMED ABED
1440 هـ - 2019م
1440 H - 2019 M


سَنَابِلُ الْحَسَنَات
الأَعْمَالُ ذَوَاتُ الأُجُورِ الْمُضَاعَفَات
جمع وإعداد
جاسم محمد عبد

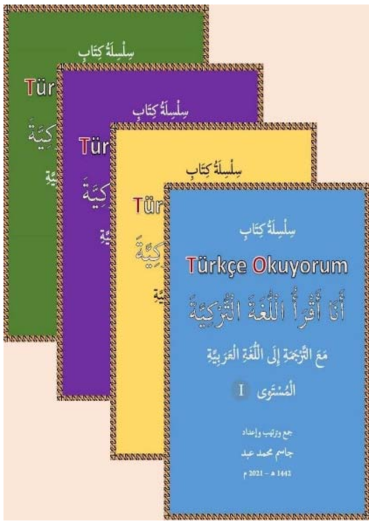

إِنَّ اللهَ لَيَضْحَكُ وَيَرْضَى
وَلَهُ الأَسْمَاءُ الْحُسْنَى
وَالصِّفَاتُ الْعُلَى
جاسم محمد عبد
١٤٤٣ هـ _ ٢٠٢١ م

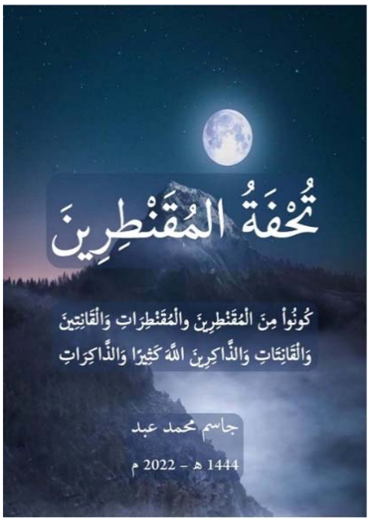

فَأَعِنِّي عَلَى نَفْسِكَ
بِكَثْرَةِ السُّجُود
عَدَدُ الرَّكَعَاتِ الَّتِي يُصَلِّيهَا الْمُسْلِمُ فِي
الْيَوْمِ وَاللَّيْلَة
جاسم محمد عبد
1443 هـ - 2022 م

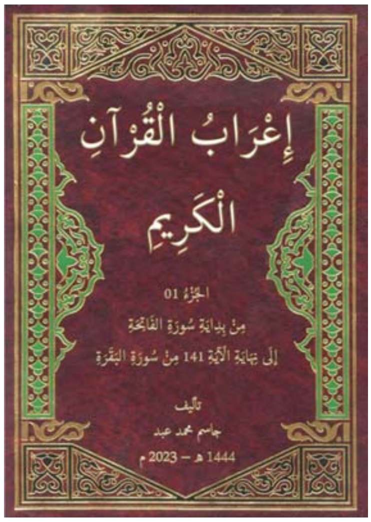

شَرْحُ كِتَابِ إِسْطَنْبُول
كِتَابُ اللُّغَةِ التُّرْكِيَّةِ لِلأَجَانِب
المُسْتَوَى A1
جمع وإعداد
جاسم محمد عبد

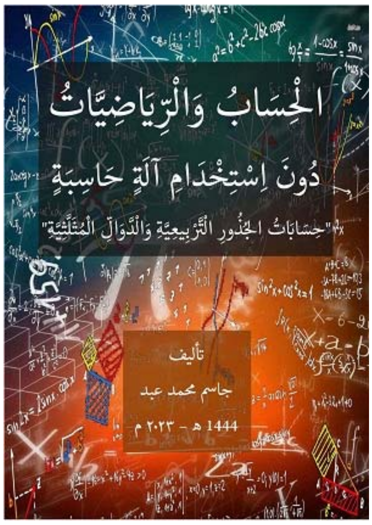

القُرْآنُ الكَرِيمُ
وَتَرْجَمَةُ مَعَانِيهِ إِلَى
اللُّغَةِ التُّرْكِيَّةِ


KUR'ÂN-I KERÎM
DİYANET VAKFI MEÂLİ


سِلْسِلَةُ كِتَابٍ
Türkçe Okuyorum
أَنَا أَقْرَأُ اللُّغَةَ التُّرْكِيَّةَ
مَعَ التَّرْجَمَةِ إِلَى اللُّغَةِ العَرَبِيَّةِ
المُسْتَوَى I
جاسم محمد عبد


تُحْفَةُ المُقْنْطِرِينَ
كُونُوا مِنَ المُقَنْطِرِينَ والمُقَنْطِرَاتِ وَالقَانِتِينَ
وَالقَانِتَاتِ وَالذَّاكِرِينَ اللهَ كَثِيرًا وَالذَّاكِرَاتِ
جاسم محمد عبد
1444 هـ - 2022 م


إِعْرَابُ القُرْآنِ
الكَرِيمِ
الجزء 01
مِن بِدَايَةِ سُورَةِ الفَاتِحَةِ
إِلَى نِهَايَةِ الآيَةِ 141 مِن سُورَةِ البَقَرَةِ
تأليف
جاسم محمد عبد
1444 هـ - 2023 م


الحِسَابُ وَالرِّيَاضِيَّاتُ
دُونَ اِسْتِخْدَامِ آلَةٍ حَاسِبَةٍ
"حِسَابَاتُ الجُذُورِ التَّرْبِيعِيَّةِ وَالدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ"
تأليف
جاسم محمد عبد
1444 هـ - ٢٠٢٣ م

https://abs.jasimabed.com

https://www.jasimabed.com

https://youtube.com/c/JasimABED
https://youtube.com/c/ArabicLanguage_AL
https://youtube.com/c/TurkishLanguage_TL
https://youtube.com/c/EnglishLanguage_EL
https://youtube.com/c/ScienceAndTechnology_ST
https://www.youtube.com/@AlHudaInfoTech
https://www.youtube.com/c/الهدىلتقنياتالمعلومات
https://youtube.com/channel/UC5OfvCW0AQZk_NZqTfMvVfg
https://youtube.com/channel/UCXfy0d_1R-cqkmdqtk095Rg
https://youtube.com/channel/UCR28-cJIy_O0LsBQ9D6Yo1g
https://youtube.com/channel/UC5S3zb4Zz0yr-EmBq8LPd7g
https://youtube.com/channel/UC_Zg0g9S0t4nZNxG1cbTf1g
https://youtube.com/channel/UCJX2psTVlyyUfGcnQsg1T-A

alhudainfotech@gmail.com

https://www.instagram.com/jasimabed2021/
https://www.instagram.com/turkishlanguage.tl/

https://www.facebook.com/jassem.abid.75

https://facebook.com/Learning.Teaching.Turkish.Language
https://facebook.com/groups/Learning.Teaching.Turkish.Language

https://facebook.com/DesignAndProgrammingOfWebsites
https://facebook.com/groups/DesignAndProgrammingOfWebsites
https://facebook.com/groups/quranandsciences
https://facebook.com/SunnahAndSciences
https://facebook.com/groups/ummatiqraa
https://facebook.com/alhudainfotech
https://facebook.com/groups/the.virtual.trip

https://twitter.com/@jasimmabed
https://twitter.com/@TurkishLanguag
https://twitter.com/@and_websites
https://twitter.com/@Learn1440
https://twitter.com/@AlHudaInfoTech

https://t.me/Eng_JasimMohammedABED
https://t.me/Eng_Jasim_ABED_Works
https://t.me/Arabic_Language_Learn
https://t.me/TurkishLanguageTeachingLearning
https://t.me/DesigningProgrammingWebsites
https://t.me/SunnahAndSciencesArabic
https://t.me/SunnahAndSciencesTurkish
https://t.me/SunnahAndSciencesEnglish

INTERNET ARCHIVE
https://archive.org
https://archive.org/details/@jasim_m_abed
https://archive.org/details/@eng_jasim_m_abed
https://archive.org/details/@almubermij
https://archive.org/details/@j_m_a_

"مَن قرأ القُرآن عظُمت قيمتُهُ، ومَن تفقَّه نبُل قدرُهُ، ومَن كتَب الحدِيث قوِيت حُجَّتُهُ، ومَن تعلَّم اللُّغة رقَّ طبعُهُ، ومن تعلَّم الحِساب جزُل رأيُهُ، ومَن لم يصُن نفسهُ لم ينفعهُ عِلمُهُ".

يأتي مصطلح الرياضيات من الجذر اللغوي رَوْض؛ ويذكر قاموس مجمع اللغة العربية في القاهرة بأنّ كلمة رياضة تشير إلى علم الرياضيات، وقد استخدمت صفة "رياضيّ / رياضيّة"؛ بدل مصطلح عالم رياضيات أو رياضياتي، وكان مصطلح الرياضيات يتم استبداله بمصطلح "علم الحساب"، وقام الخوارزمي بإضافة مصطلح "الجبر"، وهنالك مصطلح إضافي آخر هو "علم المثلثات"؛ وكانت هذه المصطلحات تقوم مقام مصطلح الرياضيات في الكتابات العربية القديمة.

وكان لعلماء المسلمين في عصر الحضارة الإسلامية فضل كبير في تقدم علم الرياضيات، فقد أثروه وابتكروا فيه وأضافوا إليه وطوّروه، واستفاد العالم أجمع من الإرث الذي تركوه؛ ففي البداية، جمع العلماء المسلمون نتاج علماء الأمم السابقة في حقل الرياضيات، ثم ترجموه، ومنه انطلقوا في الاكتشاف والابتكار والإبداع، ويُعد المسلمون أول من اشتغل في علم الجبر؛ وأول من كتب فيه الخوارزمي، وهم الذين أطلقوا عليه اسم "الجبر"، ونتيجة الاهتمام الذي أولوه إليه، فقد كانوا أول من ألَّف فيه بطريقة علمية منظمة، كما توسعوا في حساب المثلثات وبحوث النسبة التي قسموها إلى ثلاثة أقسام: عددية وهندسية وتأليفية، وحلّوا بعض المعادلات الخطية بطريقة حساب الخطأين، والمعادلات التربيعية، وأحلّوا الجيوب محل الأوتار، وجاءوا بنظريات أساسية جديدة لحل مثلثات الأضلاع، وربطوا علم الجبر بالأشكال الهندسية، وإليهم يرجع الفضل في وضع علم المثلثات بشكل علمي منظم مستقل عن علم الفلك، ما دفع الكثيرين إلى اعتباره علمًا عربيًّا خالصًا، ومن الإنجازات البارزة الأخرى في الفترة الإسلامية هي؛ التقدم في علم المثلثات الكروية، وإضافة العلامة العشرية إلى نظام الأرقام العربية.

في هذا الكتاب شرحٌ لكيفية إيجاد الجُذُورِ التَّرْبِيعِيَّةِ للأعداد، وكيفية حساب الدَّوَالِّ المُثَلَّثِيَّةِ؛ بدون استخدام آلة حاسبة.

https://jasimabed.com/books/?b=29

https://abs.jasimabed.com